

### Algebra und Zahlentheorie.

**Krein, M.:** Zur Theorie der symmetrischen Polynome. Rec. math. Moscou **40**, 271—283 u. deutsch. Zusammenfassung 283 (1933) [Russisch].

Haben die Polynome  $g(x)$  und  $g^*(x) = x^n \bar{g}\left(\frac{1}{x}\right)$  einen gemeinsamen Teiler  $D(x)$ , so gibt bekanntlich das Fujiwarasche Kriterium keinen Aufschluß über die Lage der Wurzeln von  $D(x)$  in bezug auf den Einheitskreis  $|x|=1$  (das Schur-Cohnsche Problem). Verf. gibt einen elementaren Beweis der Herglotzschen Ergänzung (Math. Z. **19**) dieses Kriteriums, welche sich mit den symmetrischen Polynomen  $D(x)$  (d. h. solchen, für die  $D^*(x) = D(x)$ ) beschäftigt und die Anzahl der Wurzeln auf dem Kreis  $|x|=1$  mit der Anzahl der positiven Quadrate der Hermiteschen Form  $\sum s_k - k x_k \bar{x}_k$  verbindet, wobei  $s_k$  die  $k$ -te Potenzsumme der Wurzeln von  $D(x)$  bedeutet. — Ferner verallgemeinert der Verf. ein Theorem von Cohn (Math. Z. **14**) folgendermaßen: Die Anzahl der Wurzeln eines symmetrischen Polynoms  $g(x)$  außerhalb des Kreises  $|x|=1$  ist gleich der Anzahl der Wurzeln des Polynoms  $\left(\frac{n}{2} - x\right)g(x) - xg'(x)$  bei  $\Re(x) > 0$  außerhalb desselben Kreises. — Dann geht der Verf. von den symmetrischen zu den trigonometrischen Polynomen über und stellt ein Kriterium dafür auf, daß die reellen Wurzeln zweier trigonometrischer Polynome gleichen Grades sich gegenseitig trennen, und einige interessante Eigenschaften solcher Polynome, unter denen besonders folgender Satz zu erwähnen ist, welcher dem bekannten Satz von Wladimir Markoff analog ist: Trennen sich die Wurzeln zweier trigonometrischer Polynome gegenseitig, so ist das auch für die Derivierten dieser Polynome der Fall. *N. Tschebotaröw* (Kasan).

**Dobrovolsky, Vl. P.:** Une chose qui compense les théorèmes de Sturm et de Sylvester. S.-B. math.-naturwiss.-ärztl. Sekt., ukrain. Ševčenko-Ges. Wiss. Lemberg H. **18**, 7 bis 12 (1933).

**Einaudi, Renato:** Autofunzioni di un operatore simmetrico che sono trasformate in sé da un altro operatore simmetrico. Ist. Lombardo, Rend. II. s. **66**, 853—879 (1933).

Ist  $S$  ein linearer Raum von Funktionen von  $x_1, \dots, x_h$ , welcher bei Permutationen der Veränderlichen linear in sich transformiert wird (z. B. der Raum aller Eigenfunktionen eines symmetrischen Operators  $H$  zum Eigenwert  $H'$ ) und durchläuft  $V$  alle symmetrischen (d. h. mit den Permutationen  $r$  vertauschbaren) linearen Transformationen von  $S$  in sich, so werden die minimalen linearen, gegenüber allen  $V$  invarianten Teilräume von  $S$  folgendermaßen gefunden. Man bilde alle Operatoren  $\pi = \sum_r \pi(r) r$ ,

welche einen Ring bilden, zerlege diesen Ring in irreduzible Rechtsideale  $A_\alpha$  und bilde die Räume  $A_\alpha S$ . Dieser Satz wird hier einfacher bewiesen als bisher [vgl. etwa Weyl, Ann. of Math. **30**, 499 (1929)]. Die irreduziblen Rechtsideale  $A_\alpha$  erhält man nach Young und Frobenius aus ihren primitiven Idempotenten  $A_\alpha = \lambda_\alpha / \lambda_\alpha^2(1)$ , wo  $\lambda_\alpha = \sum d_a a b$  in bestimmter Weise aus Schemata  $s_\alpha$  gebildet werden. Auch für diesen Satz wird ein einfacherer Beweis gegeben. Schließlich wird ein Verfahren angegeben, um aus einem  $A_\alpha$  einen vollständigen Satz von linear-unabhängigen, zu  $A_\alpha$  äquivalenten Rechtsidealen zu erhalten. Dieses Verfahren stimmt mit der bekannten rechteitigen Peirceschen Zerlegung der Algebrentheorie überein. (Vgl. zu alledem Van der Waerdens Moderne Algebra II, § 115 und § 127). *van der Waerden* (Leipzig).

**Albert, A. A.:** Normal division algebras over algebraic number fields not of finite degree. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 746—749 (1933).

Durch Arbeiten des Verf. und von Hasse, R. Brauer und E. Noether wurde der Nachweis erbracht, daß jede über einem endlichen algebraischen Zahlkörper



normale einfache Algebra, insbesondere also jede normale Divisionsalgebra, zyklisch ist. In der vorliegenden Note werden diese Resultate auf unendliche Körper algebraischer Zahlen ausgedehnt: es wird gezeigt, daß über ihnen nichtzyklische einfache normale Algebren existieren, daß aber normale Divisionsalgebren auch in diesem allgemeineren Fall stets zyklisch sind. Weiter wird die Frage der Isomorphie von Divisionsalgebren über unendlichen algebraischen Zahlkörpern auf die über endlichen zurückgeführt.

*Grell (Jena).*

**Albert, A. Adrian: Cyclic fields of degree eight.** Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 949 bis 964 (1933).

Schon Mertens hatte über algebraischen Zahlkörpern mit Hilfe idealtheoretischer Methoden alle zyklischen Erweiterungen vom Grade 8 konstruiert [S.-B. Akad. Wiss. Wien **125**, 741—831 (1916)]. Dasselbe Problem wird in der vorliegenden Arbeit für alle Körper der Charakteristik Null rein algebraisch gelöst.

*Grell (Jena).*

**Ore, Oystein: Abstract ideal theory.** Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 728—745 (1933).

Referat über die allgemeine Idealtheorie nach den Resultaten von E. Noether, Krull, v. d. Waerden, Stiemke u. a.

*Grell (Jena).*

**Lettenmeyer, Fritz: Ein neuer Beweis für die formale Entwickelbarkeit algebraischer Funktionen in Potenzreihen.** S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. **2**, 317—347 (1933).

Die Arbeit fügt den zahlreichen bekannten Beweisen für die formale Entwickelbarkeit einer algebraischen Funktion in eine Potenzreihe einen weiteren hinzu. Sie schließt sich dabei möglichst eng den einzelnen Rechenschritten an, die man bei der wirklichen Berechnung der Potenzreihenentwicklungen sämtlicher Nullstellen eines Polynoms

$$P(x; y) = \sum_{\sigma=0}^n \left( \sum_{\varrho=0}^{\infty} a_{\sigma\varrho} x^{\varrho} \right) y^{\sigma} \quad (1)$$

durchzuführen hat und benutzt daher naturgemäß die Methode der unbestimmten Koeffizienten. Während man sich aber bisher bei Anwendung dieser Methode zunächst auf die Bestimmung der Potenzreihenentwicklung einer Nullstelle  $Y$  von (1) beschränkte und dann nach Durchdivision durch den Linearfaktor  $y - Y$  das Verfahren von neuem ansetzte, wird hier gemäß der auf die Rechenpraxis gerichteten Einstellung mit einem Schlage die Potenzreihenentwicklung für alle Nullstellen von (1) gleichzeitig hergeleitet. Selbstverständlich wird der Beweis dadurch komplizierter. Doch zeigt sich, daß man trotzdem lediglich durch doppelte vollständige Induktion zum Ziele gelangen kann, wobei allerdings zahlreiche Fallunterscheidungen nötig sind und die eine dieser vollständigen Induktionen nach Fareybrüchen vorwärtsschreitet.

*F. K. Schmidt (Göttingen).*

**Lettenmeyer, Fritz: Über Gleichungen unendlich hohen Grades in zwei Variablen.** S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. **2**, 349—371 (1933).

Verf. fragt, wann eine Gleichung

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \left( \sum_{\varrho=-\infty}^{\infty} a_{\sigma\varrho} x^{\varrho} \right) y^{\sigma} = 0, \quad (1)$$

bei der die  $a_{\sigma\varrho}$  Elemente eines Körpers  $K$  der Charakteristik 0 bedeuten, durch eine Potenzreihe

$$Y = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu} \quad (\nu_0 \geq 0) \quad (2)$$

mit Koeffizienten aus einem Oberkörper von  $K$  lösbar sei. Dabei nennt er (1) durch (2)

lösbar, wenn erstens aus (1) durch formales Einsetzen der Reihe  $y = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} u_{\nu} x^{\nu}$  mit unbestimmten Koeffizienten  $u_{\nu}$  und Ordnen nach Potenzen von  $x$  eine neue Reihe

$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} P_{\tau}(\dots, u_{\nu_{\tau}}, \dots) x^{\tau}$  entsteht, deren Koeffizienten Polynome in je endlich vielen  $u_{\nu}$  sind und zweitens jedes dieser Polynome  $P_{\tau}(\dots, u_{\nu_{\tau}}, \dots)$  bei Ersetzung der  $u_{\nu}$

durch die  $c_p$  verschwindet. Durch Rechnung und Anwendung der in der vorangehenden Arbeit bewiesenen Existenzsätze (oder statt dessen durch unmittelbare Anwendung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes) ergibt sich hierauf folgende Antwort: Man markiere in der  $\varrho, \sigma$ -Ebene die Punkte  $(\varrho, \sigma)$ , für die der zugehörige Koeffizient  $a_{\varrho\sigma}$  aus (1) nicht verschwindet. Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit von (1) durch eine Reihe (2) ist, daß ein von links gesehen konvexes Stützpolygon für die Menge der markierten Punkte existiert und daß zugleich die sämtlichen Parallelen zu mindestens einer Seite dieses Stützpolygons jeweils nur endlich viele markierte Punkte  $(\varrho, \sigma)$  enthalten. Die Lösungen (2) von (1) stehen zu den Polygonseiten mit der zuletzt genannten Eigenschaft in einer genau angebbaren Beziehung. Dieser ganze Sachverhalt bildet offenbar eine Verallgemeinerung der bekannten Sätze über das Newtonsche Polygon einer Gleichung, deren linke Seite ein Polynom in  $y$  mit Potenzreihen in  $x$  als Koeffizienten ist.

F. K. Schmidt (Göttingen).

**Latimer, Claiborne G.:** Note on the invariants of the class group of a cyclic field. Ann. of Math., II. s. 34, 872—874 (1933).

§ sei die Klassengruppe eines zyklischen Zahlkörpers  $F$  von ungeradem Grad  $e$ . Verf. beweist, daß sich die Anzahl der Invarianten von §, welche gleich  $p^k$  sind ( $p$  eine beliebige Primzahl), stets in die Form  $g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots$  bringen läßt. Dabei durchläuft  $g_i$  die Grade der Primidealteiler von  $p$  in den durch die verschiedenen  $e$ -ten Einheitswurzeln ( $\neq 1$ ) erzeugten Körpern. Die  $x_i$  sind ganze Zahlen  $\geq 0$ . Aus diesem Satz und seinem Beweis folgen weitere Sätze über die Klassengruppe zyklischer Körper, die teilweise mit Tschebotaröwischen Sätzen in Zusammenhang stehen. Sind genau  $s$  Invarianten von § gleich  $p^k$ , so ist eine Untergruppe der Galoisgruppe von  $F$  einfach isomorph zu einer Gruppe von linearen homogenen Substitutionen von  $s$  Variablen modulo  $p$ . Außerdem ergibt sich die Verallgemeinerung eines vom Verf. früher für Körper von Primzahlgrad bewiesenen Theorems (dies. Zbl. 6, 389). Taussky (Wien).

**Bell, E. T.:** Polynomial diophantine systems. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 903 bis 914 (1933).

In Amer. J. Math. 55 (vgl. dies. Zbl. 6, 155) hat Verf. eine allgemeine Methode entwickelt, ein diophantisches System der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_2 = \dots = X_r, \\ Y_1 &= Y_2 = \dots = Y_s, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wo die  $X_i, Y_j, \dots$  Potenzprodukte von Unbekannten  $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m, \dots$  sind, vollständig durch eine Parameterdarstellung zu lösen, vorausgesetzt, daß die Unbekannten einem Integritätsbereich mit eindeutiger Faktorzerlegung angehören. Nimmt man nun für diesen Integritätsbereich die Hauptordnung eines einklassigen algebraischen Zahlkörpers oder allgemeiner ein kommutatives hyperkomplexes System  $VR$  über einem Integritätsbereich  $R$  derart, daß in  $VR$  die eindeutige Faktorzerlegung gilt, und drückt die Unbekannten  $x_i$  durch eine Basis  $\omega_1, \dots, \omega_n$  mit unbekannten Koeffizienten  $x_{ij}$  aus, so entsteht aus (1) ein neues diophantisches System in den Unbekannten  $x_{ij}, y_{ij}, \dots$ , welches offenbar ebenfalls vollständig lösbar ist. van der Waerden.

**Goormaghtigh, R.:** Nombres égaux à ceux formés par les derniers chiffres de leurs  $m^{\text{es}}$  puissances. Mathesis 47, 339—343 (1933).

**Lehmer, D. N.:** A complete census of  $4 \times 4$  magic squares. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 764—767 (1933).

In den vom Verf. untersuchten m. Q. hat jede Reihe und Kolonne die magische Summe. Diese Eigenschaft ist invariant für jede Permutation von Reihen, für jede Permutation von Kolonnen und für die Vertauschung von Reihen und Kolonnen. Durch diese Transformationen kann man aus jedem m. Q. ein anderes ableiten, worin die Zahl  $n^2$  in dem linken Felde der untersten Reihe steht, die Zahlen dieser Reihe in abnehmender Größe geordnet sind, die Zahlen der ersten Kolonne ebenso und außer-



dem die ober  $n^2$  stehende Zahl kleiner als die links von  $n^2$  stehende Zahl ist. Ein solches m. Q. nennt der Verf. normalisiert. Für  $n = 4$  werden alle n. m. Q. konstruiert; dabei findet man 19 mögliche Gruppen von 3 Zahlen zur Vervollständigung der untersten Reihe und der ersten Kolonne. Man erhält 468 n. m. Q. Die Anzahl aller m. Q. ist  $2 \cdot n!^2$  mal so groß.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Veselý, Václav:** Sur quelque chose des nombres premiers. Rozhl. mat.-přirod. 13, R 1—R 4 (1933) [Tschechisch].

**Bell, E. T.:** Recurrences for certain functions of partitions. Amer. J. Math. 55, 667 bis 670 (1933).

By means of elementary properties of elliptic theta functions, Bell establishes, for certain functions of partitions investigated by MacMahon [Proc. London Math. Soc. (2) 19, 75—113 (1920—21)], a set of recurrence relations simpler than those of MacMahon and better adapted to purposes of computation. These recurrence relations contain as special cases corresponding recurrence relations for certain functions of the divisors of a given integer.

R. D. Carmichael (Urbana).

**Hall, Marshall:** Quadratic residues in factorization. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 758—763 (1933).

Der Verf. nennt  $(-1/p)$   $p$  einen „scheinbaren“ Rest oder Nichtrest von  $N$  (apparent residue, résidu éventuel) je nachdem  $(N/p) = 1$  oder  $-1$  ( $p > 2$  eine Primzahl, kein Faktor von  $N$ ). Sind  $p_1$  und  $p_2$  Primzahlen, so läßt sich eine Primzahl

$$p = kN + (-1/p_1)(-1/p_2)p_1p_2 \equiv 1 \pmod{4}$$

bestimmen, die scheinbarer Rest ist, wenn  $(-1/p_1)p_1$  und  $(-1/p_2)p_2$  scheinbare Nichtreste sind; und analog in den anderen Fällen. Man kann daher mit zusammengesetzten scheinbaren Resten und Nichtresten verfahren wie mit den äquivalenten Primzahlen  $p$ . — Das Ziel der Arbeit ist der Beweis eines Satzes der praktisch brauchbar ist, um große Zahlen als Primzahlen zu identifizieren mittels quadratische Reste. Dabei wird die kleinste nichtquadratische Zahl  $L_p$  gebraucht, die quadratischer Rest ist von allen Primzahlen  $2, 3, \dots, p$ . Der Satz lautet: Sind alle Teiler der Zahl  $N < L_p$  und kann man die Zahlen  $-1, 2, \dots, (-1/p)p$  in zwei Klassen verteilen, deren erste scheinbare Reste von  $N$  enthält und deren zweite scheinbare Nichtreste und ist dann jede Zahl der ersten Klasse ein quadratischer Rest und das Produkt jeder 2 Zahlen der zweiten Klasse ein quadratischer Rest, so ist  $N$  eine Primzahl oder eine Primzahlpotenz. Anwendung auf 22253377. Der Rest 43 ist hier übersehen. Diese Lücke wird angefüllt durch Zufügung von  $N = 4711^2 + 2^4 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 43$ . N. G. W. H. Beeger.

● **Dickson, L. E.:** Minimum decompositions into fifth powers. (Math. tables. Vol. 3.) London: Office of the Brit. Assoc. f. the Advancement of Science 1933. VI S. u. Zahlen-tabellen.

This table gives in 368 pages the minimum number  $m$  of 5th powers whose sum in a given integer  $< 300000$ . For each integer  $< 150000$  an actual set of  $m$  fifth powers can be written down at once. For integers lying between 150000 and 300000 these fifth powers are not tabulated but can be obtained by subtracting  $9^5, 10^5$ , or  $11^5$  and inspecting the first half of the table. The introduction gives statistical data as to the distribution of high minima in the table. The table shows that every number in it is the sum of at most 37 fifth powers. By applying the authors method of "ascent" however it is possible to show that every number  $< 10^{483}$  has this property. The author has described the method of construction of the table in a previous article. (See this Zbl. 2, 247.) — This volume is the first outcome of a bequest to the British Association for the Advancement of Science from Lt.-Col. A. J. C. Cunningham to assist the production of tables connected with the theory of numbers. D. H. Lehmer.

**Dickson, L. E.:** Minimum decompositions into  $n$ -th powers. Amer. J. Math. 55, 593—602 (1933).

The author considers the decomposition of a given integer  $i$  in the form  $x + 2^n y + 3^n z$  where  $x, y, z$  are non-negative integers. The minimum decomposition, namely those



for which  $x+y+z$  is the minimum, can be obtained from a condensed table each row of which gives different decompositions of the same number. Theorems are proved which enable one to limit the number of columns of the table and still obtain the desired minimum decompositions. This number of columns depends only on  $n$  and is evaluated for  $n < 37$ .

*D. H. Lehmer (Princeton).*

**Dickson, L. E.:** Recent progress on Waring's theorem and its generalizations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, 701—727 (1933).

The author gives a method of deducing "universal" Waring theorems, that is, theorems valid for all positive integers, from the asymptotic theorems proved by the Hardy-Littlewood method. An asymptotic theorem of this type states that every  $n \geq C = C(k, s)$  is the sum of  $s$  or less positive integral  $k$ -th powers. Using the Winoogradoff-Gelbke form of proof, James has found an explicit form for  $C$ . By the construction of tables, the author and others have found, for certain values of  $k$ , how many  $k$ -th powers are needed to represent every  $n \leq C' = C'(k)$ . In this paper the author proves a "Formula of Ascent" which enables him to bridge the gap between  $C'$  and  $C$  for particular values of  $k$ . The chief theorems are the following:—If every integer  $> l$  and  $\leq g$  is a sum of  $r-1$  integral  $k$ -th powers  $\geq 0$ , and if  $m$  is an integer (preferably the maximum one) for which  $(m+1)^k - m^k < g-l$ , then every integer  $> l$  and  $\leq g + (m+1)^k$  is a sum of  $r$  integral  $k$ -th powers  $\geq 0$ . Again let  $l$  be an integer  $\geq 0$ . Let

$$\nu = \frac{\left(1 - \frac{l}{L_0}\right)}{k}, \quad L_0 > l, \quad (\nu L_0)^{k/(k-1)} \geq L_0,$$

$$\log L_t = \left(\frac{k}{k-1}\right)^t (\log L_0 + k \log \nu) - k \log \nu.$$

If all integers between  $l$  and  $L_0$  inclusive are sums of  $r$  integral  $k$ -th powers  $\geq 0$ , then all integers between  $l$  and  $L_t$  inclusive are sums of  $r+t$  integral  $k$ -th powers  $\geq 0$ . — Let  $g(k)$  be the least number of positive  $k$ -th powers sufficient to represent every positive integer. Then by the above means the author proves that  $g(4) \leq 35$ ,  $g(5) \leq 54$ ,  $g(6) \leq 160$ ,  $g(7) \leq 320$ ,  $g(8) \leq 575$ ,  $g(9) \leq 1177$ ,  $g(10) \leq 2421$ ,  $g(12) \leq 10711$ . These are all improvements on previous results. — The paper contains an account of much of the literature on Waring's and related problems, and a bibliography. The author also discusses some empirical generalisations of Waring's Theorem. *Wright.*

**Matoušek, J.:** Une preuve de la théorie de M. Fermat pour la 4<sup>e</sup> puissance. *Rozhl. mat.-přirod.* **13**, R 4—R 7 (1933) [Tschechisch].

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Vergnères, Gaston:** Sur l'unicité du minimum de la distance d'un point à un ensemble. *C. R. Acad. Sci., Paris* **197**, 1272 (1933).

Ist  $MP$  die kürzeste (nicht notwendig die einzige kürzeste) Verbindungsstrecke des Punktes  $M$  mit einer abgeschlossenen Menge  $A$ , so ist für jeden Punkt  $M' \neq M$  die Strecke  $M'P$  die kürzeste, und zwar die einzige kürzeste zwischen  $M'$  und  $A$ . Diese Folgerung aus der Dreiecksungleichung und der Definitionen von Strecke und Kugel (übrigens handelt es sich ersichtlich um den euklidischen Raum) ist vom Verf. als ein von G. Bouligand (in seinem dies. Zbl. **5**, 375 referierten Werke) aufgestellter Satz erklärt und durch 2 folgende Sätze (ohne Beweis) erweitert: 1. Sind  $M_1P$  und  $M_2P$  kürzeste Verbindungsstrecken der Punkte  $M_1$  und  $M_2$  mit der Menge  $A$ , so ist für jeden auf oder in dem Dreieck  $M_1M_2P$  liegenden Punkt  $M'$  die Strecke  $M'P$  die einzige kürzeste Verbindungsstrecke von  $M'$  mit  $A$ ; 2. dasselbe für 3 Punkte  $M_1, M_2, M_3$  und das Tetraeder  $M_1M_2M_3P$ .

*B. Knaster (Warszawa).*

**Bouligand, Georges:** Parallélisme C. M. et parallélisme au sens classique. *C. R. Acad. Sci., Paris* **197**, 1273—1274 (1933).

Es sei  $e$  die Berandung einer beschränkten Punktmenge; unter „Parallelismus



C. M.“ wird die (natürlich einseitige) Beziehung zwischen  $e$  und einem geometrischen Ort von Punkten mit vorgegebenem Minimalabstand von  $e$  verstanden. Einige Relationen für Mengen, bei denen es zu jedem von  $e$  hinreichend wenig entfernten Punkt auf  $e$  genau einen Punkt kleinster Entfernung gibt. *Willy Feller* (Kopenhagen).

**Montgomery, Deane:** Sections of point sets. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 915 bis 928 (1933).

Sei  $A$  ein metrischer,  $B$  ein metrischer separabler Raum und  $E$  eine Teilmenge des kartesischen Produktes  $A \times B$ , d. h. des Raumes aller Punktepaare  $x, y$  mit  $x \in A$ ,  $y \in B$  und mit der Distanzformel  $[(x_1 x_2)^2 + (y_1 y_2)^2]^{1/2}$ . Die Menge  $(a) \times B$ , also die der Punktepaare mit festem  $x = a$  bzw. die Durchschnittsmenge  $E \cdot [(a) \times B]$ , heißt vertikaler Schnitt von  $A \times B$  bzw. von  $E$ . Der Begriff des horizontalen Schnittes ist natürlich symmetrisch. Es wird zunächst, allerdings unter mannigfachen zusätzlichen Voraussetzungen, eine Reihe von hinreichenden Bedingungen aufgestellt, die von den vertikalen und horizontalen Schnitten von  $E$  erfüllt sein müssen, damit die Menge  $E$  selbst ein  $F_\alpha$ , bzw. ein  $O_\alpha$  ( $0 \leq \alpha < \Omega$ ), bzw. analytisch sei, und ferner, damit die Begrenzung von  $E$  auf einer Schnitteschar von der 1. Kategorie liege. Für separable lokal kompakte Räume  $A$  und  $B$  wird beispielsweise bewiesen (wobei die Mengen, in denen das Innere dicht liegt, als  $I$ -Mengen bezeichnet werden), daß  $E$  in bezug auf  $A \times B$  eine  $I$ -Menge ist, wenn sämtliche horizontale und vertikale Schnitte von  $E$  in bezug auf die von  $A \times B$ , sowie sämtliche horizontale Schnitte von  $(A \times B) - E$   $I$ -Mengen sind (Satz 14). Zum Schluß wird ein Teil dieser allgemeinen Ergebnisse zum Beweis eines bekannten Satzes von Baire (über reelle Funktionen zweier Veränderlichen) und dessen Verallgemeinerungen verwendet. *B. Knaster*.

**Clarkson, James A., and C. Raymond Adams:** On definitions of bounded variation for functions of two variables. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 824—854 (1933).

Es werden die Funktionen zweier reeller Veränderlicher untersucht, die nach den Definitionen von Vitali ( $V$ ), von Fréchet ( $F$ ), von Hardy ( $H$ ), von Arzelà ( $A$ ), von Pierpont ( $P$ ) und von Tonelli ( $T$ ) von endlicher Variation sind, und von je zwei dieser Funktionenklassen wird festgestellt, ob eine in der anderen enthalten ist oder nicht (außerdem wird festgestellt, daß die dem Wortlaute nach vom Original etwas abweichende Form, in der Hahn die Pierpontsche Definition wiedergibt, mit  $P$  äquivalent ist). Von besonderem Interesse ist das Beispiel einer Funktion, die zu  $F$ , aber nicht zu  $V$  gehört (ein anderes Beispiel rührt von Littlewood her). Sodann werden die Durchschnitte je zweier dieser Funktionenklassen näher untersucht; hier sei hervorgehoben das Beispiel einer Funktion, die zu  $F$  und  $T$ , aber nicht zu  $A$  gehört. Es wird gezeigt, daß alle zwischen obigen Funktionenklassen aufgestellten Relationen bestehen bleiben, wenn man nur beschränkte Funktionen zuläßt, und es wird untersucht, welche Beziehungen zwischen diesen Funktionenklassen bestehen, wenn man nur stetige Funktionen zuläßt; hier seien folgende Beispiele hervorgehoben: eine stetige Funktion, die zu  $A$ , aber nicht zu  $H$  gehört (andere Beispiele hierfür rühren von Küstermann und Hahn her); eine stetige Funktion, die zu  $P$ , aber nicht zu  $A$  gehört; eine stetige Funktion, die zu  $T$ , aber nicht zu  $P$  gehört; eine stetige Funktion, die zu  $F$ , aber nicht zu  $V$  gehört. Am Schlusse werden die noch ungelösten Fragen zusammengestellt. *Hans Hahn*.

**Manià, Basilio:** Sopra il criterio di Arzelà per l'uguale continuità delle funzioni di un insieme. Ist. Lombardo, Rend. II. s. 66, 749—757 (1933).

Gegeben sei ein beschränktes Gebiet  $G$  der  $x, y$ -Ebene, das von einer oder mehreren stetigen rektifizierbaren geschlossenen und einfachen Kurven begrenzt sei. In  $G$  sei eine Menge von Funktionen gegeben, die im abgeschlossenen Gebiet  $G$  stetig sind und im Innern von  $G$  gleichmäßig beschränkte erste Ableitungen besitzen. Es wird gezeigt, daß die Funktionen der Menge gleichgradig stetig sind. *Rellich* (Göttingen).

**Neubauer, Miloš:** Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur un nombre fini de fois. Čas. mat. fys. 63, 1—7 u. franz. Zusammenfassung 7—8 (1933) [Tschechisch].



**Poprougénko, G.:** Le principe de Dirichlet et les ensembles (A). Math. Z. 38, 146 bis 154 (1933).

In Erweiterung eines früher bewiesenen Satzes des Verf. [Fundam. Math. 18, 82 (1932); dies. Zbl. 4, 203] wird gezeigt: dann und nur dann ist eine beschränkte lineare Menge  $E$  eine Suslinsche Menge [= ensemble (A)], wenn für ein vorgegebenes ebenes, einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Delta$  eine in  $\Delta$  harmonische Funktion  $h(x, y)$  existiert, so daß  $E$  die Menge der „Randwerte“ von  $h(x, y)$  in bezug auf  $\Delta$  darstellt.

*Reinhold Baer* (Manchester).

**Riesz, Marcel:** Sur les ensembles compacts de fonctions sommables. Acta Litt. Sci. Szeged 6, 136—142 (1933).

Let  $L_p$  be the class of measurable functions such that the integral  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \equiv \|f\|_p^p$  exists, where the integration is extended over the  $n$ -dimensional Euclidean space. Let  $f_\varepsilon(x)$  be the average of  $f(x)$  over the sphere of radius  $\varepsilon$  and center at  $x$ , and  $f^N(x)$  the function coinciding with  $f(x)$  in the sphere of radius  $N$  and center at the origin and vanishing outside this sphere. In the case  $p > 1$  Kolmogoroff (see this Zbl. 2, 385) found necessary and sufficient conditions in order that a set  $E$  of  $L_p$  be compact, under the assumption that all the functions of  $E$  vanish outside a fixed sphere. They reduce to (I)  $\|f\| \leq M$  where  $M$  does not depend on  $f$ , and (II)  $\|f_\varepsilon - f\| \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , uniformly over  $E$ . Tamarkin (see this Zbl. 4, 58) eliminated Kolmogoroff's assumption and introduced the additional condition (III)  $\|f^N - f\| \rightarrow 0$  as  $N \rightarrow \infty$ , uniformly over  $E$ . Tulajkov (see this Zbl. 7, 108) showed that the set of conditions (I—III) is necessary and sufficient for the compactness of  $E$  even when  $p = 1$ . In the present note the author shows that Kolmogoroff's condition (II) can be replaced by (II')  $\|f(x+h) - f(x)\| \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ , uniformly over  $E$ , which might be conveniently characterized by saying that the functions of  $E$  are equally continuous in  $L_p$ . The proof is based upon the fact that the property of compactness is equivalent to that of being totally bounded. No distinction between the cases  $p > 1$  and  $p = 1$  is necessary in the proof.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Viola, T.:** Sulle funzioni di prima e di seconda classe di Baire. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 82—86 (1933).

In connection with the theorem result that if  $f(x)$  and  $\Phi(t)$  are of the first class (Baire) the composite function  $f(\Phi(t))$  is at most of the second class, the author proves: If  $\Phi$  is such that, for every perfect set  $P$ , the set of points of  $P$  at which  $\Phi$  is discontinuous with respect to  $P$  is non-dense in  $P$ , then, for every function  $f$  of the first class,  $f(\Phi(t))$  is of the first class; (b) for every function  $f$  of the first class, there exists a function  $\Phi$  of the first class such that  $f(\Phi(t))$  is of the second class. Theorem (a) is amplified by means of an alternative condition imposed on the perfect sets not satisfying the condition stated.

*Blumberg* (Columbus).

**Chevalley, Claude, et René de Possel:** Un théorème sur les fonctions d'ensemble complètement additives. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 885—887 (1933).

The authors demonstrate the following theorem which is useful in the theory of abstract Stieltjes integrals. Let  $E$  be an abstract set,  $K$  a corps (the sum and difference of any two sets of  $K$  belong to  $K$ ) of subsets of  $E$  and  $\lambda$  a completely additive non-negative set function defined on  $K$ . Let  $E_1, E_2, \dots$  be an infinite sequence of subsets of  $E$  belonging to  $K$  whose sum  $E_0$  is in  $K$  and let the real numbers  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , satisfy the conditions:  $-\infty < a_i \leq +\infty$ , the sum of the negative  $a_i$  converges. Denote by  $\varphi_{E_i}(p)$  the characteristic function of  $E_i$  and assume that for every  $p$  in  $E_0$ ,  $\sum_1^\infty a_i \varphi_{E_i}(p) \geq a_0$ . Under the conventions  $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$ ,  $\sum_1^\infty a_i \lambda E_i \geq a_0 \lambda E_0$ .

In particular, if the  $a_i$  and  $\lambda E_i$  are finite and  $\sum_1^n a_i \varphi_{E_i}(p) = a_0$ , then  $\sum_1^n a_i \lambda E_i = a_0 \lambda E$ .

*Chittenden* (Iowa).



## Analysis.

**Bockwinkel, H. B. A.:** Berechnung des Integrals  $\int \frac{(gx+h) dx}{(ax^2+bx+c)\sqrt{dx^2+ex+f}}$ .  
Nieuw Arch. Wiskde 18, 96—103 (1933) [Holländisch].

**Mammana, Gabriele:** Sulla risoluzione numerica di un sistema di equazioni. Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. 1, 428—440 (1933).

Folgende Sätze werden bewiesen: 1. Es sei  $F(x)$  stetig und stetig differenzierbar im Intervall  $(a, b)$ ; es sei dort  $F(x) \geq 0$  und es bedeute  $H$  das Maximum von  $|F'(x)|$  in  $(a, b)$ ; ist dann  $x_0$  ein beliebiger Punkt aus  $(a, b)$ , für den  $F(x_0) \neq 0$  ist, dann liegen in  $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$  keine Wurzeln von  $F(x) = 0$ . Dabei ist  $\varrho = F(x_0)/\Delta$ ,  $\Delta \geq H$ . 2. Es sei  $\Phi(x, y)$  stetig und stetig differenzierbar im Rechteckbereich  $R$ ; es sei dort  $\Phi(x, y) \geq 0$  und es bedeute  $K$  das Maximum von  $\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}$  in  $R$ . Ist dann  $\Phi(x_0, y_0) \neq 0$  ( $x_0, y_0$  beliebig in  $R$ ), dann verschwindet  $\Phi(x, y)$  nicht im Innern eines Kreises um  $x_0, y_0$  mit dem Radius  $\Phi(x_0, y_0)/\Delta$ ,  $\Delta \geq K$ . Letzterer Satz wird angewendet auf die Funktion  $\Phi(x, y) = \varphi^2(x, y) + \psi^2(x, y)$ , wobei  $\varphi(x, y) = 0$  und  $\psi(x, y) = 0$  ein näherungsweise auflösendes Gleichungssystem bedeutet. K. Pingizler (Wien).

**Pelosi, Luisa:** Sopra alcune proprietà del minimo e massimo integrale della somma di più funzioni. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 302—304 (1933).

**Marden, Morris:** Further mean-value theorems. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 750 bis 754 (1933).

En s'appuyant sur le „principe de l'argument“, l'auteur énonce ici plusieurs propositions qui contiennent comme cas très particuliers les théorèmes de Weierstrass-Darboux, de Gauss-Lucas, de Fékété, de Grace, ainsi que les généralisations de ces théorèmes faites antérieurement par l'auteur lui-même [Bull. Amer. Math. Soc. 38, 434—441 (1932), ce Zbl. 5, 11; Trans. Amer. Math. Soc. 32, 658 bis 668 (1930)]. W. Gontcharoff (Moscou).

**Achyeser, N.:** Über eine extremale Eigenschaft rationaler Funktionen. Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. math. Ukraine, IV. s. 6, 39—45 (1933).

Encore une application des fonctions elliptiques à la résolution des problèmes extrémaux de la théorie des fonctions. Il s'agit de reconnaître quelle est la valeur minima du module-maximum d'une fonction rationnelle de degré donné dans un intervalle  $I_1$ , étant supposé que les valeurs de cette fonction dans un autre intervalle  $I_2$  sont assujetties à rester dans un intervalle  $I_3$ . Le cas des intervalles  $I_1, I_2$  et  $I_3$  infinis n'est pas exclu. — La question se réduit à la meilleure approximation de la fonction  $|x|$  dans l'ensemble de deux intervalles, problème posé par Zolotareff en 1877 (voir aussi N. Achyeser, Bull. Acad. Sci. USSR. 1929, 919—931). W. Gontcharoff.

**Tzitzéica, G.:** Sur les fonctions rationnelles osculatrices à une fonction analytique. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 974—976 (1933).

Ankündigung einer Reihe von Sätzen über oskulierende rationale Funktionen (Frobenius, Padé), die in der von Wilczynski angegebenen Richtung weitergehen. R. Schmidt (Kiel).

**Karamata, J.:** Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. Bull. Soc. Math. France 61, 55—62 (1933).

L'auteur donne les deux définitions suivantes de la croissance régulière et montre leur équivalence:  $q(z)$  définie pour  $x \geq 0$  est à croissance régulière si elle est positive et si, ou bien 1°  $q(tx)/q(z)$  tend pour toute valeur  $t > 0$ , vers  $h(t)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ; ou bien 2° il existe un nombre  $k$  tel que  $\int_0^1 t^k q(tz)/q(x) dt$  tende pour  $x \rightarrow \infty$ , vers  $1/a_k + 1 > 0$ . Ces définitions dont l'une avait été déjà donnée par l'auteur [Math., Cluj. 1930, 38—53] correspondent respectivement à une définition de M. R. Schmidt [Math. Z. 22, 89—152 (1925)] et à une de M. I. Schur [Math. Z. 31, 391—407 (1929)]. — L'auteur démontre le théorème



fondamental: Toute fonction à croissance régulière peut être mise sous la forme  $q(z) = x^a L(x)$  où  $L(x)$  est une fonction à croissance lente. *Blanc*.

**Jessen, B.:** A note on distribution functions. J. London Math. Soc. 8, 247—250 (1933).

Es sei  $f(t)$  eine reellwertige, in jedem endlichen Intervall  $L$ -integrierbare, nicht notwendig beschränkte Funktion, und man setze  $f_x(t) = f(t)$  oder  $f_x(t) = 0$ , je nachdem  $f(t) \leq x$  oder  $f(t) > x$  ist.  $f(t)$  soll die Eigenschaft haben, daß  $f_x(t)$  bei jedem  $x$  einen zu  $|t| \leq T \rightarrow +\infty$  gehörigen Mittelwert besitzt. Es wird bewiesen, daß dann das durch  $2T$  dividierte  $L$ -Maß der durch die Ungleichungen  $|t| \leq T, f(t) < x$  festgelegten  $t$ -Menge bei unbegrenzt wachsendem  $T$  einer Grenze zustrebt, wenn  $x$  nicht einer höchstens abzählbaren Menge angehört. *Wintner* (Baltimore).

**Hardy, G. H., and J. E. Littlewood:** Some more integral inequalities. Tôhoku Math. J. 37, 151—159 (1933).

The main result of the paper is as follows. If  $p > 1, 1 < p, m < p$ , then

$$\int_0^\infty x^{l+m-p-1} h^p dx \leq K \int_0^\infty x^{l-1} f^p dx \int_0^\infty x^{m-1} g^p dx, \quad h(x) = \int_0^x f(u) g(x-u) du,$$

where

$$K = \left[ \Gamma\left(\frac{p-l}{p-1}\right) \Gamma\left(\frac{p-m}{p-1}\right) \right] \Gamma\left(\frac{2p-l-m}{p-1}\right)^{p-1}.$$

The equality sign holds if and only if  $f(x) = Ax^{\frac{1-l}{p-1}} e^{-cx}$ ,  $g(x) = Bx^{\frac{1-m}{p-1}} e^{-cx}$ , where  $A, B, c$  are positive constants. This result holds in the limiting case  $p = 1, l \leq 1, m \leq 1$ , with the obvious modification concerning the value of  $K$ . Analogous

results hold for series, and also for the case  $h(x) = \int_0^\infty f(u) g(x-u) du$ . The question

as to determination of the best possible value of  $K$  in the last case remains open, however. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Hille, Einar, and J. D. Tamarkin:** On moment functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 902—908 (1933).

Cette Note prolonge l'exposé des recherches donné dans les mêmes Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 573—577 (1933); ce Zbl. 7, 113. Elle contient plusieurs résultats importants précisant, entre autres, les conditions assurant la possibilité de représenter une fonction analytique  $f(z)$  sous la forme d'une „moment function“ c'est à dire

$$(Classe M_0) \quad f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \cdot d\alpha(t) \quad (R(z) \geq 0)$$

où  $\alpha(t)$  est à variation bornée dans  $(0, \infty)$  et  $\alpha(0) = 0$ . Citons p. ex. le théorème suivant: si  $f(z) \in H_p, 1 \leq p \leq 2$ , alors  $f(z+h) \in M_0$  pour tout  $h > 0$ . La condition nécessaire et suffisante de  $f(z) \in M_0$  est l'intégrabilité absolue de  $F(t)$  dans  $(-\infty, +\infty)$ , où

$$\sqrt{2\pi} \cdot F(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(iu) \cdot e^{-itu} \cdot du$$

et alors on a

$$\sqrt{2\pi} \cdot f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \cdot F(-t) \cdot dt.$$

A la fin sont étudiées les conditions de  $F[\mu(z)] \in M_h$  si  $\mu(z) \in M_0, \mu(\infty) = \alpha(+0) = \alpha_0$  la fonction analytique  $F(w)$  étant holomorphe au point  $w = \alpha_0$ . La conclusion en est qu'un  $\eta$  existe tel que pour  $h > \eta$  on a bien  $F[\mu(z)] \in M_h$ , la classe  $M_h$  étant formée par les fonctions  $\varphi(z)$  telles que  $\varphi(z+h) \in M_0$ . *E. Kogbetliantz* (Téhéran).

**Ghermanesco, Michel:** Sur une nouvelle définition des moyennes successives d'une fonction sommable. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 920—922 (1932).

Mit dem Ziel, Verallgemeinerungen der Tatsachen zu gewinnen, die für Mittelbildungen über die Oberfläche und das Innere von Kugeln bestehen, definiert der Verf.



im  $p$ -dimensionalen Raum die Folge  $m_1, m_2, \dots$  der sukzessiven Mittel durch die Rekursionsformel

$$m_i = \frac{p+2i-2}{R^{p+2i-2}} \int_0^R R^{p+2i-3} m_{i-1} dR$$

( $m_0$  ist der Mittelwert einer summablen Funktion  $u(x_1, \dots, x_p)$  über die Oberfläche, also  $m_1$  der Mittelwert über das Innere einer Kugel vom Radius  $R$ ). Die Funktionen  $m_i$  genügen der Differentialgleichung

$$\Delta m_i = \frac{\partial^2 m_i}{\partial R^2} + \frac{p+2i-1}{R} \frac{\partial m_i}{\partial R}$$

und der Relation

$$\Delta m_i = \frac{p+2i-2}{R} \frac{\partial m_{i-1}}{\partial R}.$$

Vermöge der  $m_i$  gelangt der Verf. zu einer auch auf nur summable Funktionen anwendbaren allgemeinen Definition des Laplaceschen Differentialoperators  $\Delta u$  und seiner Iterierten und untersucht alsdann die so verallgemeinerte Differentialgleichung

$$\Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \dots + \lambda_n u = 0.$$

Lüneburg (Göttingen).

### Reihen:

**Camp, C. C.:** A new method for finding the numerical sum of an infinite series. Amer. Math. Monthly **40**, 537—542 (1933).

**Scorza Dragoni, G.:** Intorno alla moltiplicazione delle serie che convergono condizionatamente. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **18**, 193—197 (1933).

**Scorza Dragoni, G.:** Intorno alla moltiplicazione delle serie che convergono condizionatamente. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **18**, 271—275 (1933).

**Rey Pastor, J.:** Sur l'application de la méthode de Borel aux séries qui ont des termes nuls. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 973—974 (1933).

Remarques critiques au sujet de la Note de M. Vignaux relative au procédé de sommation de M. E. Le Roy [C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1076 (1933); ce Zbl. **6**, 301].

E. Kogbetliantz (Téhéran).

**Vignaux, J. C.:** Sur la sommation de la série double de Taylor divergente. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 40—43 (1933).

Dans cette Note l'auteur énonce sans preuve la sommabilité par la méthode de M. E. Borel de la série double de Taylor de  $f(x, y)$ ,  $x$  et  $y$  étant deux variables complexes, dans un domaine en général plus étendu que le domaine formé par un système de cercles associés. Ce résultat constitue d'ailleurs une extension évidente et pour ainsi dire immédiate du résultat classique de M. E. Borel relatif à son polygone de sommabilité d'une série de Taylor à une variable complexe. E. Kogbetliantz.

**Vignaux, J. C.:** Sul metodo di sommazione di Abel-Poisson per le serie doppie. Boll. Un. Mat. Ital. **12**, 213—219 (1933).

Ne sont considérées que les séries doubles numériques ayant leurs sommes partielles  $S_{m,n}$  bornées:  $|S_{m,n}| < A$  quelque soient  $m, n$ . Ne sont démontrées que les extensions pour ainsi dire immédiates et évidentes des résultats classiques relatifs au procédé d'Abel-Poisson pour les séries simples, tels que permanence, sommabilité de la série-produit des deux séries sommables. A la fin de la note n'est que formulée une question plus profonde et présentant quelque intérêt: une série double sommable par le procédé des moyennes arithmétiques de Césaro est-elle ou non sommable par le procédé d'Abel-Poisson? Il serait vraiment intéressant de résoudre cette question. E. Kogbetliantz (Téhéran).

**Szász, Otto:** Zur Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen. Acta math. **61**, 185 bis 201 (1933).

Ein interessanter Satz von Paley [J. London Math. Soc. **7**, 205—208 (1932); dies. Zbl. **5**, 156] wird in der folgenden Weise verallgemeinert. Die Fourierschen



Konstanten  $a_n, b_n$  der in  $(0, 2\pi)$  beschränkten und integrierbaren Funktion  $f(\vartheta)$  mögen die Bedingungen

$$n a_n \geq -k, \quad n b_n \geq -k \quad (k \text{ fest})$$

erfüllen. Die zu  $f$  gehörige Fouriersche Reihe besitzt dann gleichmäßig beschränkte Abschnitte. Ist überdies  $f$  überall stetig,  $f(0) = f(2\pi)$ , so konvergiert sie gleichmäßig für alle  $\vartheta$ . Die Hilfsmittel des Verf. sind der Fejérsche Satz über die Mittel  $(C, 1)$  der Fourierschen Reihe und der Hardy-Landausche Satz. Im zweiten Teil seiner Arbeit stellt er ähnliche Sätze mittels der Poissonschen Summierung auf. Es sei das folgende Resultat erwähnt: Setzt man  $2\varphi(\vartheta) = f(\vartheta) + f(-\vartheta)$ , so folgt aus

$$\frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t) dt \rightarrow s \quad (h \rightarrow +0) \quad \text{ sowie aus } \quad n a_n \geq -k,$$

daß  $\sum a_n$  konvergiert; ferner ist dann für ein festes  $\vartheta$

$$\frac{1}{h} \int_0^h [\varphi(\vartheta + t) + \varphi(\vartheta - t)] dt \rightarrow 2s(\vartheta) \quad (h \rightarrow +0)$$

notwendig und hinreichend für die Konvergenz von  $\sum a_n \cos n\vartheta$ .

Szegő.

**Salem, Raphaël:** Sur les séries de Fourier des fonctions de carré sommable. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1175—1176 (1933).

In a previous note [C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 113 (1933); this Zbl. **7**, 113] the author showed that if  $\sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 = O(\log^{-1} n \cdot \log_2^{-2} n \cdot \dots \log_{\mu-1}^{-2} n \cdot \log_{\mu}^{-2-\varepsilon} n)$  ( $\varepsilon > 0$ ) then there exists a sequence  $\{\alpha_n\}$  of real numbers, such that  $\sum \varrho_k \cos(kx - \alpha_k)$  is the Fourier series of a continuous function. Now the author shows on an example that the result does not hold for  $\varepsilon = 0$ .

A. Zygmund (Wilno).

**Hille, Einar, and J. D. Tamarkin:** On the theory of Fourier transforms. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 768—774 (1933).

If  $g(s)$  is a function of the Lebesgue class  $L^p$ , where  $1 < p < 2$ , it is known that the function  $G(u; a) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^a e^{-ius} g(s) ds$  converges in the mean of order  $p/(p-1)$  to a function  $G(u)$  of  $L^{p/(p-1)}$ ,  $G(u)$  being the Fourier transform of  $g(s)$  [E. C. Titchmarsh, Proc. London Math. Soc. (2) **23**, 279—289 (1925)]. It has not, however, been proved that if  $g(s; a) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^a e^{ius} G(u) du$ , then  $g(s; a)$  converges in the mean of order  $p$  to  $g(s)$ . The authors supply a proof, depending on the theory of conjugate functions of the class  $L^p$ , due to M. Riesz.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

### **Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen und Verwandtes:**

**Hille, Einar, and J. D. Tamarkin:** On the theory of Laplace integrals. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 908—912 (1933).

Continuation des Notes aux mêmes Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 573—577 et 902—908 (1933); ce Zbl. **7**, 113. Dans cette Note sont étudiées les conditions assurant la possibilité de représenter une fonction  $f(z)$  par une intégrale de Laplace généralisée

$$(Classe R_{\alpha}(a)) \quad f(z) = z^{\alpha} \cdot \int_0^{\infty} e^{-zu} A_{\alpha}(u) \cdot du \quad (\alpha = \text{réel})$$

cette intégrale étant supposée absolument convergente pour  $R(z) > a \geq 0$ . Si la  $p^{\text{ième}}$  puissance du module d'une fonction  $f(z)$  holomorphe pour  $x = R(z) > a$  est intégrable sur la droite  $x > a$  parallèle à l'axe  $O\bar{Y}$  dans le plan  $z = x + iy$  on écrira  $f(z) \subset H_p(a)$  et aussi  $f(z) \subset H_{p,\alpha}(a)$  si  $z^{-\alpha} f(z) \subset H_p(a)$ . Alors on a le résultat (th. 2): si  $f(z) \subset H_{p,\alpha}(a)$ , où  $1 \leq p \leq 2$ , alors  $f(z) \subset R_{\alpha}(a)$ . Outre ce résultat la Note contient



beaucoup d'autres. Les auteurs étudient les fonctions algébriques de fonctions  $f(z)$  appartenant à la classe  $R_\alpha(a)$  au même point de vue  $\subset R_\alpha(b)$ . Ils appliquent ensuite les résultats obtenus aux séries de Dirichlet. Ils prouvent en particulier qu'une série

$$f(s) \sim \sum_1^\infty a_n e^{-i n s}.$$

Transformée par le procédé de sommation partielle devient absolument convergente [avec la somme  $f(s)$ ] dans le demi-plan où la fonction de Lindelöf  $\mu(\sigma; f)$  est inférieure à un-demi ou bien celle de Carlson  $r(\sigma; f)$  est inférieure à deux. *Kogbelliantz.*

**Wintner, Aurel:** A note on the non-differentiable function of Weierstrass. *Amer. J. Math.* **55**, 603—605 (1933).

Es wird bemerkt, daß die Weierstrassische Funktion  $x(t) = \sum_{n=1}^\infty a^n \cos b^n t$ ,  $0 < a < 1$ ,  $0 < b > C = C_a$  bei transzendenter  $b$  als Realteil einer fastperiodischen Funktion mit linear unabhängigen Exponenten eine besonders regelmäßige Verteilungsfunktion (oder Umkehrfunktion im Großen) besitzt. Vgl. eine frühere Arbeit des Verf. [*Amer. J. Math.* **55**, 309—331 (1933); dies. Zbl. **7**, 157]. *B. Jessen* (Princeton N. J.).

**Bohr, Harald:** Stabilität und Fastperiodizität. *Mat. Tidsskr. B H.* **2/3**, 21—25 (1933) [Dänisch].

In Anschluß an eine Arbeit von A. Markoff [*Math. Z.* **36**, 708—738 (1933); dies. Zbl. **7**, 34] und zur Erläuterung der Markoffschen Schlußweisen wird der folgende Satz bewiesen: Jede beschränkte Bewegung  $x = x(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ,  $x$  ein  $n$ -dimensionaler Vektor) welche stark-stabil ist, ist fastperiodisch. Stark-stabil heißt eine Bewegung, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  gibt derart, daß die Ungleichung  $|x(t') - x(t'')| \leq \delta$  für zwei beliebige Werte  $t'$  und  $t''$  die Ungleichung

$$|x(t' + t) - x(t'' + t)| \leq \varepsilon$$

(für alle  $-\infty < t < \infty$ ) impliziert.

*B. Jessen* (Princeton N. J.).

**Petersen, Richard:** Eine analytische Funktion mit speziellen fastperiodischen Eigenschaften. *Mat. Tidsskr. B H.* **2/3**, 33—44 (1933) [Dänisch].

Es wird eine ganze transzendente Funktion  $f(s) = f(\sigma + it)$  konstruiert, welche auf einer einzigen vertikalen Geraden  $\sigma = \sigma_0$  fastperiodisch ist; die Konstruktion beruht auf dem Hauptbeispiel der Habilitationsschrift des Verf. (dies. Zbl. **6**, 199).

*B. Jessen* (Princeton N. J.).

**Bochner, S.:** Remark on the integration of almost periodic functions. *J. London Math. Soc.* **8**, 250—254 (1933).

Es sei  $F(t)$  eine nirgends verschwindende und etwa stetig differenzierbare Funktion und  $f(t)$  ihre logarithmische Ableitung. Es wird bewiesen, daß die Stepanoffsche (also z. B. Bohrsche) Fastperiodizität von  $f(t)$  die Bohrsche Fastperiodizität von  $F(t)$  dann und nur dann mit sich bringt, wenn  $f(t) - ic$  bei passender Wahl der reellen Konstante  $c$  ein beschränktes unbestimmtes Integral besitzt. Und zwar haben dann  $f(t)$  und  $F(t)$  bis auf  $c$  identische Frequenzmoduln.

*Wintner* (Baltimore).

**Wintner, Aurel:** On the distribution function of almost-periodic angular variables. *Amer. J. Math.* **55**, 606—610 (1933).

Übertragung einer früher [*Math. Z.* **30**, 290—319 (1929)] vom Verf. entwickelten Methode zur Behandlung der Werteverteilung einer reellen fastperiodischen Funktion auf den Fall einer Funktion  $f(t)$  mit  $|f(t)| = l$ , d. h.  $f(t) = \exp i\vartheta(t)$ . Die Verteilung  $\sigma(\varphi)$  wird durch die Momentengleichungen  $\int \exp(in\varphi) d\sigma(\varphi) = 2\pi M_n((f(t))^n)$  bestimmt. Das wesentliche Hilfsmittel ist der Zusammenhang des trigonometrischen Momentenproblems mit positiv definiten Hermiteschen Formen. *B. Jessen* (Princeton N. J.).

### Differentialgleichungen:

**Gallina, Gallo:** Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari omogenee autoaggiunte. *Ist. Lombardo, Rend. II. s.* **66**, 724—730 (1933).

Es sei  $F_k(z)$  ein linearer homogener Differentialausdruck  $k$ -ter Ordnung,  $G_k(y)$  sein



adjungierter. Dann ist bekanntlich  $zF_k(y) - yG_k(z) = \frac{d}{dx} \Phi_{k-1}(y, z)$ , wo  $\Phi_{k-1}$  Ableitungen von  $y, z$  höchstens bis zur  $(k-1)$ -ten Ordnung enthält. Aus dieser Identität wird im selbstadjungierten Fall ( $F_k = (-1)^k G_k$ ) gezeigt, daß die Kenntnis einer partikulären Lösung von  $F_k$  genügt, um von der Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung,  $F_k = 0$  auf eine Differentialgleichung der Ordnung  $k-2$  zu gelangen. *Rellich* (Göttingen).

**Krawtchouk, M.:** Sur l'approximation des intégrales des équations différentielles linéaires. Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. math. Ukraine, IV. s. 6, 11—16 (1933).

L'auteur considère l'équation

$L(y) \equiv M(y) + \lambda N(y) \equiv y^{(k)} + A_1 y^{(k-1)} + \dots + A_k y + \lambda \{a_1 y^{(k-1)} + \dots + a_k y\} = f(x)$   
avec les conditions aux limites

$$V_i(y) \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} y^{(j)}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_i^{(j)} y^{(j)}(2\pi) = 0 \quad (i = 1 \dots k)$$

[où les  $A_i(x)$  sont continus et les  $a_i(x), f(x)$  bornés et intégrables]. Il cherche la représentation approchée:

$$y(x) \propto y_m(x) = b_{-m}^{(m)} \varphi_m(x) + \dots + b_m^{(m)} \varphi_m(x)$$

où  $\varphi_l(x)$  est la solution du problème  $M(\varphi_l) = e^{ilx}$ ,  $V_1(\varphi_l) = 0, \dots, V_k(\varphi_l) = 0$

( $l = -m \dots m$ ) et les  $b_p^{(m)}$  sont déterminés par les équations  $\int_0^{2\pi} [L(y_m) - f(x)] e^{ipx} dx = 0$

( $p = -m, \dots, 0, \dots, m$ ). Avec l'aide du règle de M. Lebesgue concernant l'approximation trigonométrique l'auteur démontre que

$$|y^{(j)} - y_m^{(j)}| \leq c \frac{\log m}{m} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1), \quad \text{ou que} \quad |y^{(j)} - y_m^{(j)}| \leq c \frac{\log m}{m^{k-j}}$$

dans le cas de self-adjointness du problème considéré. *Janczewski* (Leningrad).

**Levin, V.:** Über eine Eigenschaft der Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen. S.-B. Berlin. math. Ges. 32, 27—32 (1933).

The following theorem has been proved by W. B. Fite [Ann. of Math. 2 (18), 214—220 (1916—1917)]: If  $y$  is a non-trivial solution of the differential equation

$$y^{(n)} + m_1 y^{(n-1)} + \dots + m_n y = 0$$

with continuous coefficients, and if each of the functions  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  vanishes at least once in the interval  $a \leq x \leq b$  of length  $l$ , and if  $M_k$  is a constant such that  $|m_k(x)| \leq M_k$  throughout  $(a, b)$  for  $k = 1, 2, \dots, n$ , then

$$M_1 l + M_2 l^2 + \dots + M_n l^n > 1.$$

For the special case of the equation  $y^{(n)} + m(x)y = 0$ , with  $|m(x)| \leq M$ , this inequality becomes  $Ml^n > 1$ . The problem of the greatest lower bound of  $Ml^n$  is here investigated by Levin by aid of a method of minimum maximorum. The precise results can not be stated with sufficient brevity to justify their inclusion here. *Carmichael*.

**Adamoff, N.:** Sur quelques propriétés des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients périodiques. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1280—1282 (1933).

Diese Arbeit befaßt sich mit den Nullstellen und den Periodizitätseigenschaften der Integrale einer Hillschen Differentialgleichung  $u'' + (\lambda\tau + \varrho)u = 0$ , wo  $\lambda$  ein Parameter,  $\tau$  und  $\varrho$  periodische Funktionen bedeuten. Es werden Sätze über  $\lambda$  abgeleitet, welche aus der Forderung periodischer Integrale hervorgehen. Im wesentlichen waren diese Sätze aus einer Arbeit O. Haupts (vgl. Erg. Math. 1, H. 3, 14) bereits bekannt.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Fouarge, L.:** Sur un système de Koenig. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 150—153 (1933).

Let  $A$  and  $B$  be transformations depending respectively upon  $r$  and  $t$  essential parameters  $a$  and  $b$ . If the product  $AB$  involves fewer than  $r + t$  essential parameters,

the author has previously given [this Zbl. 6, 57] a system  $S$  of the König type [Math. Ann. 23, 520 (1884)] in the derivatives  $\partial f / \partial a$  of the right members of  $A$ . He now augments  $S$  by the equations  $\partial f / \partial b = 0$  expressing that  $A$  does not involve the parameters of  $B$ . The integrability conditions of the augmented system, which is of the regular type, are of the first order and determine additional derivatives  $\partial f / \partial a$ . The system (in general not of the König type) obtained by the further adjunction of these last equations is shown to be passive (completely integrable). *J. M. Thomas* (Durham).

**Winkler, E.:** Die Unbestimmtheitsstelle der ausgearteten hypergeometrischen Differentialgleichung. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 2, 237—256 (1933).

Verf. bestimmt  $n$  ausgezeichnete partikuläre Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$\sum_{r=0}^m B_{m-r} \frac{d^r y}{(d \ln x)^r} - x \sum_{r=0}^n A_{n-r} \frac{d^r y}{(d \ln x)^r} = 0, \quad (A_0 = B_0 = 1) \quad n > m,$$

die in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle  $x = 0$  ein einfaches asymptotisches Verhalten zeigen, und ermittelt die Übergangssubstitution, die diese Integrale durch das zu  $x = \infty$  gehörige kanonische Fundamentalsystem ausdrückt. Die Methode besteht darin, daß die ausgeartete Differentialgleichung durch eine Integraltransformation auf eine nichtausgeartete hypergeometrische Differentialgleichung derselben Ordnung zurückgeführt wird, die vom Verf. in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 2, 394) eingehend untersucht wurde.

*v. Koppentfels* (Hannover).

**Lepage, Th.:** Sur les équations de Monge-Ampère à trois variables indépendantes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 166—172 (1933).

Let there be seven variables  $z, x_i, p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) and let  $F$  be a cubic symbolic differential form from which  $dz$ , if present, has been eliminated by means of the equation  $\omega = dz - p_i dx_i = 0$ . The author defines a second cubic  $\bar{F}$ , called conjugate to  $F$ . The form  $2\Omega = F + \bar{F}$  is self-conjugate. If the rank of  $F$  is three, that of  $\bar{F}$  is also three and that of  $\Omega$  either three or five. Conversely, every self-conjugate cubic of rank three or five can be written  $F + \bar{F}$ , where the  $F$ 's are conjugate and of rank three. Incidentally,  $F, \bar{F}$  and  $\Omega$  always have a linear factor in common. Let  $\omega_i = dp_i - p_{ij} dx_j$  ( $p_{ij} = p_{ji}$ ),  $G = \omega_1 \omega_2 \omega_3$ , and let  $H$  be the product of the seven differentials  $dz, dx, dp$ . The equation  $FG = fH$  defines a function  $f$  of  $z, x_i, p_i, p_{ij}$  called adjoint to the cubic. The forms  $F, \bar{F}, \Omega$  all have the same adjoint. The adjoint is linear in the determinants of all orders from the matrix  $||p_{ij}||$ . Conversely, any function  $f$  with such linearity is the adjoint of a unique self-conjugate cubic  $\Omega$ . If the rank of  $\Omega$  is less than six, the equation  $f = 0$ , in which the  $p$ 's are interpreted as the mongean notation for the derivatives of  $z$ , is named by the author a Monge-Ampère equation in three variables. If the corresponding  $F$ 's are written  $F = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ ,  $\bar{F} = \pi_1 \pi_2 \pi_3$ , the pfaffian systems  $\omega = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$  and  $\omega = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$  are called its characteristic systems. They are distinct or coincide according as  $\Omega$  is of rank five or three. The method, which generalizes a result previously obtained for two independent variables by the author [Bull. Acad. Roy. Belgique 5, 16, 103—123 (1930)], is said to apply to the case of  $n$  variables.

*J. M. Thomas* (Durham).

**Le Roux, J.:** Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 971—973 (1933).

A well known theorem of Jacobi reduces the integration of a system of Lagrange's equations  $\frac{d}{du} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i'} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$  to that of a partial differential equation of the first order. Conversely, to every partial differential equation

$$F(x_1, \dots, x_n; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0$$



of the first order (not containing  $z$  explicitly) may be made to correspond a generalisation of Lagrange's equations. The transformations given by the author lead incidentally to the Lagrangian form of the differential equations of the bicharacteristics.

*H. S. Ruse (Princeton).*

**Rosenblatt:** Sur l'application de la méthode des approximations de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1278—1280 (1933).

Für die Gleichung  $z_{x^2}y^2 = f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{x^2}y, z_{xy^2})$

wurde von D. Mangeron die Existenz einer auf dem Rand verschwindenden Lösung im Rechteck  $a \leq x \leq c, b \leq y \leq d$  durch die Methode der sukzessiven Approximationen festgestellt. Im Falle daß  $f$  nur von  $x, y, z$  abhängt, sucht Verf. nach einer weniger einschränkenden Bedingung als die von D. Mangeron vorausgesetzte Lipschitzsche Bedingung, die die Konvergenz der Approximationen noch sichern soll. *Cimmino.*

**Germay, R.-H.-J.:** Extension à des équations intégral-différentielles à plusieurs variables indépendantes, du théorème de Cauchy relatif à l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre de forme résolue. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 118—121 u. 157—160 (1933).

Der Cauchysche Satz über die Existenz im Kleinen der Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit vorgeschriebenen Anfangswerten, wird hier auf Integro-Differentialgleichungen verallgemeinert. Die Voraussetzungen sind derart festgesetzt, daß man die übliche Beweismethode (Bestimmung der Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung durch sukzessive Differentiationen der Gleichung und Vergleich mit einer in der Nähe des Anfangspunktes konvergierenden Entwicklung) noch brauchen kann. *G. Cimmino (Napoli).*

**Dungen, F.-H. van den:** Sur une nouvelle classe de conditions aux limites adjointes aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 791—809 (1932).

Classical boundary-value problems associated with Laplace's equation, the bi-laplacian, etc. always involve boundary conditions in which the derivatives defined along given contours are of lower order than the original equation. For example, the Dirichlet and Neumann conditions for Laplace's equation,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , are respectively (1)  $z = f_1$  and (2)  $\frac{\partial z}{\partial n} = f_2$ , where  $f_1$  and  $f_2$  are given functions defined at each point of a bounding contour  $s$ . Similarly, classical conditions for the problem of the elastic plate involve derivatives of third order at most. This paper is devoted to a discussion of problems where the boundary conditions associated with a partial differential equation are of equal or superior order to the order of the differential equation. Classical conditions are referred to as conditions of class *A* and those of the new problem as conditions of class *B*. Examples of class *B* are furnished (1) by the problem of determining the transverse vibrations of a plane membrane stretched by threads attached to springs, (2) by the problem just given in which the membrane is supported by elastic rods, and (3) by the small movements of a fluid enclosed by membranes stretched by threads attached to springs. — The author shows how the Green's functions for problems of class *B* can be defined and how these problems are thus reducible to the solution of integral equations. The existence of the Green's function is discussed and this problem is shown to be equivalent to proving the existence of two or more Green's functions for associated problems of class *A*. In the case of example (1) above the problem is reduced to finding a Green's function for the membrane with fixed periphery and a second Green's function for the threads attached to springs. The paper concludes with an example in which the author determines the small movements of a fluid filling a space having the form of a parallelopiped all of whose walls are non-deformable except one which is a homogeneous elastic membrane uniformly stretched and fixed at all the points of its rectangular contour. *H. T. Davis (Bloomington).*

**Pycha, Z.: Raggio per onde associate a fenomeni.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 123—129 (1933).

For a phenomenon  $N$  depending on a parameter  $\nu$  (representing the frequency in the case of periodic phenomena) the waves are characterised as hypersurfaces,  $\sigma(\nu) \equiv \sigma(x^1, x^2, x^3, t) = \text{constant}$ , where  $\sigma(\nu)$  is an integral of the differential equation  $p_0 + H = 0$  and where  $H$  is a function of  $t, x^1, x^2, x^3$  and the partial derivatives  $P_0, P_1, P_2, P_3$  of  $\sigma$  with respect to  $t, x^1, x^2, x^3$  respectively. The bicharacteristics or rays are identical with the Hamiltonian equations of motion of a particle,  $\dot{x}^i = P_i, \dot{p}_i = -X_i$ ,  $\dot{\sigma}(\nu) = \sum_{i=1}^3 p_i P_i - H$ , where  $X_i, P_i$  are the derivatives of  $H$  with respect to  $x^i, p_i$  respectively. Let  $\mathcal{E}(\nu)$  be the density of energy and  $F(\nu) = \mathcal{E}(\nu) u(\nu)$  be the flow of energy, the components of  $u$  being  $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3$ . We suppose now that the quantity of energy  $\Delta E$  in the shell between the wave-surfaces  $\sigma = \tau, \sigma = \tau + d\tau$  is given by  $\Delta E = R(\Phi) d\tau$ , where  $\Phi = (\nu, \tau)$  is analogous to a phase. Representing the rays given by  $\frac{dx^1}{P_1} = \frac{dx^2}{P_2} = \frac{dx^3}{P_3}$  by surfaces  $\xi(x^1, x^2, x^3) = \text{constant}$   $\eta(x^1, x^2, x^3) = \text{constant}$  and the waves by  $\varrho(x^1, x^2, x^3) = \text{constant}$ , the tubular surface of rays starting from an element of  $\sigma$  will be divided up into volume elements  $d\omega = a^{\frac{1}{2}} d\xi d\eta d\varrho$ , where  $\mathcal{E}(\nu) = [a(\nu)]^{-\frac{1}{2}} G[\Phi(\nu)]$ . For an observer situated in a tube of flow of  $F(\nu)$  and on Finzi's surface  $\sigma_1$  for which  $\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0$  the sum  $S$  of the quantities  $[a(\nu)]^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(\nu)$ , for the individual waves whose phases sensibly agree, is a periodic function of the phase  $\Phi(\nu)$ . The mean value of  $S$  over a period is propagated along the tube with a certain velocity  $v$  regarded as an extension of group-velocity and as in the direction of the rays of the phenomenon  $N$ . This velocity of the resultant radiation is given by the formula

$$W_i = P_i \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \div \sum_{i=1}^3 P_i \frac{\partial \Phi'}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

H. Bateman (Pasadena).

**Walsh, J. L.: Note on the location of the critical points of Green's function.** Bull. Amer. Math. Soc. 39, 775—782 (1933).

Die bekannten Sätze von 1. Gauß-Lucas, 2. Jensen, 3. Walsh (in einem Spezialfall) über die Nullstellen der Ableitung eines Polynoms werden durch Polynom- bzw. Lemniskatenannäherung sinngemäß auf die Greensche Funktion  $G$  von zusammenhängenden Bereichen mit dem unendlich fernen Punkt als Aufpunkt übertragen. Statt der Nullstellen der Ableitung handelt es sich hierbei um die in dem betreffenden Bereich gelegenen Nullstellen von  $\text{grad } G$ .

Szegö (Königsberg, Pr.).

**Rothe, Erich: Über asymptotische Entwicklungen bei Randwertaufgaben der Gleichung  $\Delta \Delta u + \lambda u = \lambda^k \psi$ .** Math. Ann. 109, 267—272 (1933).

Übertragung der Ergebnisse bei Gleichungen zweiter Ordnung aus Math. Ann. 108 (1933); (dies. Zbl. 7, 115).

Willy Feller (Kopenhagen).

**Devisme, Jacques: Sur les fonctions hypergéométriques et une de leurs extensions.** C. R. Acad. Sci., Paris 197, 812—814 (1933).

Es werden für die Differentialgleichungen der hypergeometrischen Funktionen von einer und mehreren Variablen einfache symbolische Darstellungen angegeben. Z. B. für die Funktion

$${}_rF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, n) \dots (\alpha_r, n)}{(\beta_1, n) \dots (\beta_s, n)} \frac{x^n}{(1, n)} \quad (r \leq s+1)$$

die Differentialgleichung

$$\prod_{i=1}^r \left\{ \alpha_i + \left( x \frac{d}{dx} \right) \right\} y - \prod_{i=1}^s \left\{ \beta_i + \left( x \frac{d}{dx} \right) \right\} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ähnliche Formen ergeben sich für die Appellschen hypergeometrischen Funktionen von 2 Variablen.

Lüneburg (Göttingen).



## Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

● **Jeray, Jean:** Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1933.

**Chapman, S.:** Some ratios of infinite determinants occurring in the kinetic theory of gases. J. London Math. Soc. 8, 266—272 (1933).

The author gives a direct proof for the evaluation of the limiting values of a ratio of two determinants, which occurred in one of his previous papers [Philos. Trans. Roy. Soc. London 216 (1915)]. The method applied can be extended to evaluate ratios of slightly more general determinants.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.)

**Giraud, Georges:** Validité de la théorie de Fredholm pour certains noyaux non bornés. Bull. Sci. math., II. s. 57, 327—334 (1933).

Let  $G(X_1, X_2)$  be a continuous function of two points  $X_1$  and  $X_2$ ,  $X_1 \neq X_2$ , of a bounded closed  $m$ -dimensional set  $E$ . Suppose that  $|G(X_1, X_2)| \leq k f(R) R^{-m}$  where  $R = |X_1 - X_2|$ ,  $f(t) \uparrow$ ,  $f(t) t^{-m} \downarrow$  and  $\int_0^\infty f(t) t^{-1} dt < \infty$ . Under these assumptions the author proves that the Fredholm theory applies to the integral equation

$$\varphi(X) - \lambda \int_E G(X, A) \varphi(A) dV_A = \varphi(X),$$

where  $\varphi(X)$  is a given continuous function. — The estimates obtained and the devices employed by the author are interesting, but it would seem as if the assumptions are unnecessarily restrictive. If  $m = 1$  and  $\omega(R)$  is integrable in a finite interval  $(0, a)$  it is well known that the kernel  $\omega(|x_1 - x_2|)$  defines a completely continuous transformation of the space  $L$  into itself. The same is true of  $G(x_1, x_2)$  if it is measurable and  $|G(x_1, x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|)$ , so that the theorems of Fredholm are valid for such a kernel. In the general case it is sufficient to assume that  $G(X_1, X_2)$  is measurable and  $|G(X_1, X_2)| \leq \omega(R) R^{1-m}$ ,  $\omega(R) \subset L$ . Consequently all the assumptions on continuity and monotony would appear to be superfluous.

*E. Hille.*

**Martin, Monroe H.:** On existence theorems concerning the analytical transformations of spaces of infinitely many dimensions into themselves. Amer. J. Math. 55, 661—666 (1933).

A well known theorem [cf. A. Wintner, Math. Ann. 96, 291—294 (1927)], assuring the existence of a unique system of functions,  $y_i = y_i(\lambda, x_1, x_2, \dots)$  [ $i = 1, 2, \dots$ ], which satisfy an infinite system of equations of the form,  $y_i = \lambda f_i(\lambda, y_1, y_2, \dots, x_1, x_2, \dots)$ , is adapted by the author to prove the existence of a unique inverse for a transformation of the form,  $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} y_j - P_i(y_1, y_2, \dots)$ . Here  $\|c_{ij}\|$  is an infinite non-singular matrix, normal in the sense of v. Koch, and  $P_i$  is a power series, lacking constant and linear terms, in the infinitely many variables,  $y_1, y_2, \dots$ . The author restricts himself to a region of the type,  $|y_i| < B$ , and the fundamental domain of convergence for the various other power series arising is of the same sort, viz. a „complex cube“ of infinitely many dimensions.

*Daniel C. Lewis jr.* (Baltimore, Maryland).

**Fantappiè, Luigi:** Überblick über die Theorie der analytischen Funktione und ihre Anwendungen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 1—25 (1933).

A concise and clear survey of the author's numerous investigations in the theory and applications of analytic functionals. A complete list of author's publications (containing 29 items) appended at the end of the article will be found of great value.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Calonghi, M.:** Sul funzionale analitico lineare che ha per indicatrice la funzione  $I$ . Ist. Lombardo, Rend. II. s. 66, 819—825 (1933).

Aus den Eigenschaften der Eulerschen  $\Gamma$ -Funktion werden entsprechende Eigenschaften eines linearen analytischen Funktionaloperators abgeleitet (des Operators, dessen Indikatriz, mit den Bezeichnungen des Ref., genau die  $\Gamma$ -Funktion ist). Der

Verf. beweist noch, daß einige von diesen Eigenschaften nötig und hinreichend sind zur vollkommenen Charakterisierung des Operators. *L. Fantappiè* (Bologna).

### Differenzengleichungen:

● **Milne-Thomson, L. M.:** The calculus of finite differences. London: Macmillan & Co., Ltd. 1933. XIX, 558 S. u. 23 Fig. geb. 30/-.

This presents connected accounts (illustrated by exercises) of the theories of interpolation and of linear difference equations particularly in their more traditional aspects. The author's original contributions other than details involved in exposition consist in part of the use of an operator for differences analogous to that of Heaviside for derivatives. Most of the material on interpolation and related topics is however already available in English in such works as Whittaker and Robinson. The Calculus of Observations (1924), Steffensen, Interpolation (1927), Scarborough, Numerical Mathematical Analysis (1930). Recent topics here covered include reciprocal differences as introduced by Thiele, Nörlund's theory of the polynomials of Bernoulli and Euler (for which symbolic methods are also used here) and iterative processes for interpolation without differences. The formal theory of difference equations is handled in the spirit of Boole's work with concessions to modern rigor. Nörlund and to a less extent, Aitken, Pincherle and Amaldi, Knopp, Poincaré, Perron, are relied upon heavily. Scant indication however is given of the fundamental work in this field in recent years by a considerable number of able writers such as, for example, Birkhoff, Galbrun, Carmichael, and Hilb. Laplace's transformation and the study of series in factorials and in "inverse factorials" are treated in some detail. *Albert A. Bennet* (Providence).

**Moskovitz, David:** Certain irregular non-homogeneous linear difference equations. Amer. J. Math. 55, 525—552 (1933).

Moskovitz establishes the existence theorem for analytic solutions of the non-homogeneous linear difference equation

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) y(x+n-k) = b(x)$$

in which the functions  $a_k(x)$  and  $b(x)$  are assumed to be rational while the corresponding homogeneous equation (obtained by replacing  $b(x)$  by 0) belongs to the class of irregular cases which are called class 2a by C. R. Adams [Trans. Amer. Math. Soc. 30, 507 (1928)]. He also obtains the asymptotic forms of the solutions. The regular case was treated earlier by K. P. Williams [Trans. Amer. Math. Soc. 14, 209 (1913)]. While the paper of M. was in press a memoir by Birkhoff and Trjitzinsky appeared (see this Zbl. 6, 168) treating the homogeneous equation for all cases, thus affording the basis for a definitive investigation of the non-homogeneous equation, a treatment which ultimately must necessarily replace the partial solution of the problem as it is presented by Moskovitz.

*R. D. Carmichael* (Urbana).

**Ward, Morgan:** A property of recurring series. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 914—916 (1933).

If  $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$  denotes a sequence  $(U)$  of rational numbers satisfying a homogeneous linear difference equation of order  $k$  with rational coefficients, then it is known that, if a set of  $k$  consecutive terms of  $(U)$  is ever repeated in the sequence, all the roots of the polynomial associated with the difference equation are roots of unity and the sequence  $(U)$  is periodic. Ward shows that the like occurs, generally speaking, if a single term of the sequence is repeated a sufficient number of times at regular intervals. More precisely, he proves the following theorem. If in any particular rational solution  $(U)$  of the difference equation  $\Omega_{n+k} = P_1 \Omega_{n+k-1} + P_2 \Omega_{n+k-2} + \dots + P_k \Omega_n$ ,  $P_i$  rational,  $i = 1, \dots, k$ , we have  $U_a = U_{a+b} = U_{a+2b} = \dots = U_{a+kb} \neq 0$ , where  $a$  and  $b$  are fixed positive integers, and if the associated polynomial

$$x^k - P_1 x^{k-1} - P_2 x^{k-2} - \dots - P_k$$

is irreducible in the field of rationals, then the polynomial is cyclotomic, and every solution of the difference equation is periodic.

*R. D. Carmichael* (Urbana).

**Ritt, J. F., and J. L. Doob:** Systems of algebraic difference equations. Amer. J. Math. 55, 505—514 (1933).

In this paper is derived an analogue, for systems of algebraic difference equations,



of a theorem of Ritt [Differential equations from the algebraic standpoint; Amer. math. soc. coll. publ. 14; New York, Amer. math. Soc. 1932; this Zbl. 5, 394—396]. A form  $F$  is defined as a polynomial in a finite number of the symbols  $y_i(x+j)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=0, 1, \dots$ ), with coefficients meromorphic in an open region which contains  $x+1$  whenever it contains  $x$ . A polygonal line  $L$  lying in this region and itself containing  $x+1$  whenever it contains  $x$ , together with a set of functions  $y_i(x)$  analytic on  $L$  and causing  $F$  to vanish, is called a solution of  $F$ . Equivalence and reducibility being defined in a natural way, the following result is established: Every system of forms is equivalent to a finite set (essentially unique) of irreducible systems.

C. R. Adams (Providence).

### **Funktionentheorie:**

**Walsh, J. L.:** Note on polynomial interpolation to analytic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 959—963 (1933).

Verf. führt den Begriff des „größten geometrischen Konvergenzgrades“ (g. g. K.) ein: Es sei  $C$  eine Jordansche Kurve und  $C_\rho$  ( $\rho > 1$ ) bezeichne die Schar der „Kreisbilder“ bei der Kreisabbildung des Äußeren von  $C$ . Es sei  $f(z)$  im abgeschlossenen Inneren von  $C$  regulär, und  $\rho$  möge den größten Wert bedeuten,  $\rho > 1$ , für den  $f(z)$  im offenen Inneren von  $C_\rho$  regulär ist. Eine Polynomfolge  $p_n(z)$  ( $n$  der Grad von  $p_n$ ) besitzt auf  $C$  den g. g. K., wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(C)} \max |f(z) - p_n(z)|^{\frac{1}{n}} = \rho^{-1}$$

gilt. Zahlreiche bekannte Polnomtypen haben diese Eigenschaft. — In der vorliegenden Note beweist Verf. das folgende Theorem: Es sei  $z_\nu^{(n)}$  ( $\nu=0, 1, \dots, n$ ;  $n=1, 2, 3, \dots$ ) eine Folge von Interpolationsstellen, die keinen Häufungspunkt außerhalb von  $C$  besitzen. Es sei  $f(z)$  im abgeschlossenen Inneren von  $C$  regulär und  $p_n(z)$  werde durch die Interpolationsbedingungen

$$p_n(z_\nu^{(n)}) = f(z_\nu^{(n)}) \quad (\nu=0, 1, \dots, n)$$

erklärt. Damit die Folge  $p_n(z)$  auf  $C$  für jedes  $f(z)$  den g. g. K. habe, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes  $z$  außerhalb von  $C$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=0}^n |z - z_\nu^{(n)}|^{\frac{1}{n+1}} = r |\varphi(z)|$$

gilt. Hier bezeichnet  $\varphi(z)$  die geeignet normierte Kreisabbildungsfunktion des Äußeren der Kurve  $C$  und  $r$  den transfiniten Durchmesser derselben. — Vgl. zu diesem Satze die Budapest Dissertation von L. Kalmár [abgedruckt in den Mat. és Fiz. Lapok 33, insbesondere S. 124—125 (1926)].

Szegő (Königsberg, Pr.).

**Cauer, W.:** Ein Interpolationsproblem mit Funktionen mit positivem Realteil. Math. Z. 38, 1—44 (1933).

Verf. nennt Funktionen  $f(\lambda)$  „positiv“, wenn 1.  $f(\lambda)$  regulär und  $\Re f(\lambda) > 0$  für  $\Re \lambda > 0$ , 2.  $f(\lambda)$  reell für reelles  $\lambda$ . Die positiven Funktionen, die für rein imaginäres  $\lambda$  selbst rein imaginär sind, heißen Funktionen der Klasse  $\mathfrak{E}$ . Gewisse Fragen der Fernmeldetechnik (Herstellung von „Siebschaltungen“) führen auf die Aufgabe, solche Paare von rationalen Funktionen  $z_1(\lambda)$ ,  $z_2(\lambda)$  der Klasse  $\mathfrak{E}$  zu bestimmen, für welche auf der positiv imaginären Achse in vorgeschriebenen Intervallen („Durchlaßbereichen“) möglichst genau  $z_1 \cdot z_2 = 1$  und in den Restintervallen („Sperrbereichen“) möglichst genau  $z_1/z_2 = 1$  gilt. Nachdem man sich einen Überblick über die zulässigen Produkte  $z_1 \cdot z_2$  verschafft hat, sucht man aus ihnen das „beste“ heraus; dann verfährt man ebenso für die Quotienten  $z_1/z_2$  (die Approximationsforderungen für  $z_1 \cdot z_2$  und  $z_1/z_2$  sind voneinander unabhängig). Aus Produkt und Quotient ergeben sich  $z_1$  und  $z_2$  selbst. Die Approximation ist beliebig gut möglich, wenn man an den Intervallenden und in beliebig klein wählbaren Umgebungen davon auf Annäherung verzichtet; man muß nur als Zähler und Nenner von  $z_1$  und  $z_2$  Polynome genügend hohen Grades (elektrotechnisch: genügend viele Schaltelemente) zulassen. Es werden verschiedene Approxi-

mationsmethoden angegeben: mittels Interpolation, gewisser Integraldarstellungen oder Kettenbruchentwicklungen der 1, ferner nach Tschebyscheff. Die elektrotechnisch besonders günstige Tschebyscheffsche Approximation wird ausführlich am Falle nur eines zusammenhängenden Sperr- oder Durchlaßbereiches behandelt. Die Lösung läßt sich dann — mit Hilfe von elliptischen Funktionen — entweder explizit angeben oder wenigstens annähern. *Th. Zech (Darmstadt).*

**Montel, Paul:** Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles à termes entrelacés. Ann. École norm., III. s. 50, 171—196 (1933).

Eine rationale oder meromorphe Funktion heiße verzahnt (à termes entrelacés), wenn ihre Pole und Nullstellen sämtlich einfach sind, auf der reellen Achse liegen und sich gegenseitig trennen. Verzahnte rationale Funktionen seien so normiert, daß sie auf der reellen Achse reellwertig sind; sie sind es dann nur dort. Verf. zählt Eigenschaften verzahnter rationaler Funktionen auf und wendet sich dann dem Studium solcher meromorpher Funktionen zu, die als gleichmäßige Grenzfunktionen einer Folge verzahnter rationaler Funktionen erzeugbar sind; sie sind verzahnt und nur auf der reellen Achse reellwertig. Umgekehrt gibt es aber verzahnte meromorphe Funktionen, die nicht so erzeugt werden können; das vom Verf. dafür genannte Beispiel  $z \operatorname{tg} z$  ist zwar unzutreffend, denn es hat  $z = 0$  zur doppelten Nullstelle, doch wäre etwa  $e^z$  oder  $\frac{z-k}{z+k} e^z$  für  $0 < k < 2$  ein Beispiel: es gibt außerhalb der reellen Achse Stellen, wo diese Funktionen reellwertig sind. Ob aber die Verzahntheit und die Reellwertigkeit allein auf der reellen Achse hinreicht, um die betr. Funktion als Grenzfunktion im obigen Sinne darzustellen, bleibt offen. — Es werden nun für meromorphe Funktionen der bezeichneten Art notwendige und hinreichende Bedingungen an Hand der Partialbruchentwicklung angegeben, wobei auch der Spezialfall untersucht wird, daß nur eine Halbachse Pole enthält. Ein zweiter Teil der Arbeit untersucht Funktionen von der Form

$$\frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots}{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots};$$

hier wird von Konvergenz gesprochen, wenn die Brüche aus den  $n$ -ten Abschnitten beider Reihen gleichmäßig kugelkonvergent sind; je nachdem alle oder nur unendlich viele von diesen Brüchen verzahnte rationale Funktionen sind, ist die Grenzfunktion vom Geschlecht kleinergleich 1 oder 2; in dem obigen Spezialfall erniedrigt sich das Geschlecht auf 0 oder 1. — Der dritte Teil der Arbeit ist den Iterationen verzahnter rationaler Funktionen bzw. der Grenzfunktionen von ihnen gewidmet. Während die Menge  $\mathcal{G}$  der abstoßenden Fixpunkte (und ihrer Häufungspunkte) ganz der reellen Achse angehört, gibt es höchstens 2 anziehende Fixpunkte; sie sind entweder konjugiert komplex (dann können sie Fixpunkte 1. Ordnung sein oder einen Zyklus 2. Ordnung bilden;  $\mathcal{G}$  erfüllt die ganze reelle Achse), oder es gibt nur einen reellen anziehenden Fixpunkt. Es kann auch einen reellen indifferenten Fixpunkt mit Multiplikator 1 geben. An einer Reihe von Beispielen werden die möglichen Fälle als vorhanden nachgewiesen. Die Arbeit schließt mit einer Bemerkung zur Schröderschen Funktionalgleichung und einigen Verallgemeinerungen. *Ulrich (Marburg, Lahn).*

**Fekete, M., et S. Marshak:** Sur certaines conditions nécessaires pour la régularité d'une fonction en un point du cercle de convergence. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1172 bis 1174 (1933).

Verff. beweisen den Satz: Ist  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  für  $|x| < 1$  konvergent,  $a_n$  reell und  $f(x)$  regulär in  $x = 1$ , so gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(|a_n| + a_n)}{\log n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(|a_n| - a_n)}{\log n}.$$

Der Beweis benutzt den Satz, daß unter diesen Voraussetzungen aus einseitiger Beschränktheit der  $a_n$  die volle Beschränktheit folgt, und den Satz, daß mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$



auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} x^n$  in  $x = 1$  regulär ist. — Verff. beweisen ihren Satz auch für den Fall, daß nicht  $f(x)$ , sondern  $(1-x)^{\rho} f(x)$  für  $\rho < 0$  in  $x = 1$  regulär ist. *Heilbronn.*

**Bernstein, Vladimiro:** *Sopra una proposizione relativa alla crescenza delle funzioni olomorfe.* Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 381–399 (1933).

$F(z)$  étant une fonction de  $z = r e^{i\varphi}$  holomorphe dans un angle  $\Sigma$ ,  $\alpha < \varphi < \beta$ , l'auteur fait une intéressante étude de la croissance de  $|F(z)|$  sur les rayons  $\varphi = \text{const.}$ , en relation avec le théorème de Lindelöf-Phragmén. Il utilise les résultats d'un travail antérieur (Rend. R. Acc. Lincei 15; ce Zbl. 4, 65) et la notion d'ordre précisé de Valiron.  $\rho(r)$  étant dérivable pour  $r > 0$  et  $\rho(r) \rightarrow \rho > 0$ ,  $\rho'(r) r \log r \rightarrow 0$  si  $r \rightarrow \infty$ , on pose  $V(r) = r^{e(r)}$ . On a les deux th. suivants, le second pouvant être rapproché de travaux sur le th. de Wiman (Amira, Math. Z. 22; Besicovitch, Math. Ann. 97, Valiron, Opuscula Wiman dedicata). — I. Le rayon  $\varphi = \gamma$  appartenant à  $\Sigma$ , supposons  $\log |F(r e^{i\varphi})| < -A V(r)$ , ( $0 < A < \infty$ ), sauf pour un ensemble de points de densité maximum moindre que 1. Deux cas sont possibles: 1) si l'on pose

$$h(\varphi) = \lim_{r=\infty} \frac{\log |F(r e^{i\varphi})|}{V(r)},$$

on a  $h(\gamma) \leq -A$  et  $h(\varphi) < -C$ ,  $C > 0$ , dans un secteur contenant  $\varphi = \gamma$ ; 2)  $\log |F(r e^{i\varphi})| / V(r)$  n'est pas borné dans un secteur si petit soit-il contenant  $\varphi = \gamma$ . II. On suppose que  $F(z)$  est d'ordre précisé  $\rho(r)$  dans  $\Sigma$ , donc,  $M(r, \Sigma)$  étant le maximum de  $F(r e^{i\varphi})$  si  $\alpha < \varphi < \beta$ , on a

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, \Sigma)}{V(r)} = 1.$$

Alors, à tout système de deux nombres arbitr. petits  $\varepsilon, \omega$  et à tout rayon  $\varphi = \text{const.}$  de  $\Sigma$  correspond une suite de segments,  $r_k \leq r \leq r_k(1 + \delta)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lim r_k = \infty$  dans chacun desquels l'ensemble des  $r$  tels que  $\log |F(r e^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] V(r)$  a une densité linéaire moyenne supérieure à  $1 - \omega$ .  $\delta$  est fonction de  $\varepsilon$  et  $\omega$ . — La densité moy. d'un ens. sur un segment est le rapport de sa mesure à la long. du segment. Pour un ens. de nombres  $x > 0$ , si  $D(\delta)$  est la limite sup. pour  $\xi \rightarrow \infty$  de la densité moy. sur  $\xi < x < \xi(1 + \delta)$ , la densité l. max. est la limite de  $D(\delta)$  pour  $\delta \rightarrow 0$ . — L'a. applique I à l'étude de la convergence absolue de certaines intégrales, II. s'applique de même dans le cas de l'intégrale de Laplace-Borel. *G. Valiron* (Cambridge, Mass.).

**Viola, T.:** *Sur l'accumulation des valeurs des fonctions analytiques qui forment une suite uniformément convergente.* J. Math. pures appl., IX. s. 12, 173–204 (1933).

Der Hurwitzsche  $a$ -Stellensatz lehrt bekanntlich: Konvergiert eine Folge  $f_n(z)$  analytischer Funktionen in der Umgebung einer Stelle  $\zeta$  gleichmäßig, so ist entweder die Anzahl der  $a$ -Stellen aller  $f_n$  in  $|z - \zeta| < \varepsilon$  gleich der Vielfachheit, mit der die Grenzfunktion  $F(z)$  den Wert  $a$  an der Stelle  $\zeta$  annimmt (für  $n > N_\varepsilon$ ), oder es ist  $F(z)$  identisch gleich  $a$ . Daraus kann für Normalfamilien geschlossen werden: Zu jedem Bereich im Normalitätsgebiet gibt es eine Schranke  $\nu = \nu(\mathfrak{B}, a)$ , so daß jede Funktion der Familie auf  $\mathfrak{B}$  höchstens  $\nu$   $a$ -Stellen hat, es sei denn die Konstante  $a$  unter der Grenzfunktionenmenge enthalten. In dieser Arbeit wird eine Reihe von Sätzen bewiesen, die dahin gehen, daß es für abgeschlossene Wertmengen  $\{a\}$  eine Universal-schranke  $\nu(\mathfrak{B})$  gibt, die von dem einzelnen  $a$  nicht mehr abhängt, sofern keine Konstante der Menge  $\{a\}$  zur Grenzfunktionenmenge gehört. Verf. stützt sich dabei auf Ergebnisse von Marty (vgl. dies. Zbl. 5, 301) und auf eine Veranschaulichung der Verschiebungen, welche die  $F(\zeta)$ -Stellen beim Durchlaufen der Folge  $f_n(z)$  erfahren; er ersetzt dazu die Folge durch eine Funktion

$$f(t, z) = f_n(z) + (t - n)[f_{n+1}(z) - f_n(z)] \quad \text{für } n \leq t \leq n + 1$$

und betrachtet die mit  $t$  stetige Änderung der Stellen, wo  $f(t, z) = F(\zeta)$  gilt.

*Ullrich* (Marburg, Lahn).

**Mursi, M.:** Sur les valeurs du module de  $\sigma(z)$  à l'infini. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1284—1287 (1933).

Verf. untersucht die folgende, ihm von Hadamard vorgelegte Frage über die Weierstraßsche Sigmafunktion: Wie muß das Verhältnis der Perioden  $2\omega_1$  und  $2\omega_2$  beschaffen sein, damit, unter  $z_0$  einen beliebigen konstanten Wert verstanden, der Betrag  $E_{mn} = |\sigma(z_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)|$  gleichzeitig mit  $m^2 + n^2$  gegen unendlich strebt? Setzt man  $\omega_2/\omega_1 = \tau = r + is$  ( $r, s$  reell,  $s > 0$ ) — so muß es heißen, nicht  $\omega_1/\omega_2$ , wie in der auch sonst an Druckfehlern reichen Arbeit sinnstörend gedruckt ist —, so gibt Verf. für den Fall, daß  $r$  eine ganze Zahl ist, notwendige und hinreichende Bedingungen, für den Fall, daß  $r$  keine ganze Zahl ist, nur hinreichende Bedingungen an. Diese bestehen in der Angabe eines offenen Intervalles, dem die Zahl  $s$  angehören soll.

*Bessel-Hagen (Bonn).*

**Stollow, S.:** Du nombre des points de ramification des transformations intérieures sur une variété topologique à deux dimensions. Bull. Sci. math., II. s. 57, 355—376 (1933).

In an earlier paper [Ann. Ecole norm. 45, 348 (1928)] the writer introduced the interior transformation of a region on an orientable manifold into another orientable manifold: one which is continuous, carries open sets into open sets, and carries no continuum into a single point. Such transformations are topologically like those determined by monogenic analytic functions. Certain theorems about analytic functions are proved for the case of interior transformations, then generalized, with application to the analytic function case. These include Hurwitz's formula relating the number of branch points to the connectivity numbers; a theorem of Ålander [C. R. Acad. Sci., Paris 184, 1411 (1927)] relating the numbers of zeros and poles of  $f(z)$  with the number of zeros of the derivative and the number of branch points of  $f(z)$  providing multiple poles; and Hadamard's theorem regarding the property of being one-to-one. The theorem of Ålander is generalized to the case of multiple-valued functions. Finally the theorem of Hadamard is extended and generalized for the case of any orientable surface, open or closed, of finite genus.

*A. B. Brown (New York).*

**Hodge, W. V. D.:** A Dirichlet problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties. Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 257—303 (1933).

Die Arbeit behandelt harmonische Funktionale der  $p$ -ten Ordnung in einem  $n$ -dimensionalen Raum. Für diese wird ein Dirichletsches Problem aufgestellt und unter üblichen Glattheitsbedingungen gelöst, zunächst im euklidischen Raum. Im Falle  $n = 2p$  wird eine direkte Verallgemeinerung des Poissonschen Integrals erhalten. — Es folgt dann, als wichtigster Teil der Untersuchung, die Anwendung auf analytische Mannigfaltigkeiten. Das Hauptergebnis besagt, daß es auf einer solchen Mannigfaltigkeit überall harmonische  $p$ -fache Integrale gibt, und daß diese linear von  $R_p$  besonderen Integralen abhängen, wobei  $R_p$  die  $p$ -te Bettische Zahl der Mannigfaltigkeit bezeichnet.

*Ahlfors (Helsingfors).*

**Fréchet, Maurice:** Remarques sur les communications de M. Minetti au sujet d'un espace composé de fonctions holomorphes. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1182—1184 (1933).

L'auteur considère l'espace  $H_2$  constitué de fonctions  $a(z) = \sum_n a_n z^n$  holomorphes à l'intérieur du cercle-unité  $C$  et telles que  $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ . La distance  $(a, b)$  de deux éléments  $a = a(z)$  et  $b = b(z)$  de  $H_2$  est définie par l'expression bien connue

$$(a, b) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_C |b(z) - a(z)|^2 |dz| \right]^{1/2}.$$

Cela posé 1° si pour les éléments  $f_p$  et  $f$  de  $H_2$ , la distance  $(f_p, f)$  tend vers zéro, non seulement  $|f_p(z) - f(z)|$  convergera uniformément vers zéro sur tout cercle intérieur



à  $C$ , mais encore le produit  $(1 - |z|)^{\frac{1}{2}} |f_p(z) - f(z)|$  convergera uniformément vers zéro dans et sur  $C$  (c'est évidemment une conséquence immédiate de la formule de Cauchy

$$[f_p(z) - f(z)]^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{[f_p(\zeta) - f(\zeta)]^2}{\zeta - z} d\zeta;$$

2° en définissant  $\cos(ab, ac)$  dans  $H_2$  par la formule

$$(b, c)^2 = (a, b)^2 + (a, c)^2 - 2(a, b)(a, c) \cos(ab, ac)$$

et en posant généralement  $a \times b = \frac{1}{4\pi} \int [a(z) \bar{b}(z) + \bar{a}(z) b(z)] |dz|$ , on a la formule classique  $(b - a) \times (c - a) = (a, b)(a, c) \cos(ab, ac)$ . L'auteur observe que ces résultats complètent les communications précédentes de M. Minetti [C. R. Acad. Sci., Paris 197, 221, 474, 637 (1933); cf. ce Zbl. 7, 169, 251]. Saks (Warszawa).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

Arany, D.: Le problème des parcours. Tôhoku Math. J. 37, 17—22 (1933).

Für das Problem der Irrfahrt in einem Gitter mit rechteckiger Begrenzung werden Formeln für die Wahrscheinlichkeit  $w(n, P)$  entwickelt, in  $n$  Schritten zum Punkte  $P$  zu gelangen, ohne den Rand zu treffen. Durch Benutzung gewisser trigonometrischer Identitäten ergeben sich aus der Darstellung der Wahrscheinlichkeiten durch Exponentialpolynome Darstellungen durch Binomialkoeffizienten, z. B. im dreidimensionalen Fall für ein hinreichend großes Gittergebiet die Formel

$$w(n, x, y, z) = \frac{1}{6^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \left( \frac{n-k}{n-k+x+y} \right) \left( \frac{n-k}{n-k+x+y} \right) \left( \frac{k}{k+z} \right).$$

Ferner ergeben sich Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten  $w_\lambda(n, x)$ , in  $n$  Schritten derart zum Punkte  $x$  zu gelangen, daß dieser Punkt im Verlauf der  $n$  Schritte genau  $\lambda + 1$  mal getroffen wird:

$$w_\lambda(n, x) = 2^\lambda \binom{x}{n-2\lambda} w(n-2\lambda, x)$$

(vgl. zu dieser Arbeit: G. Pólya, Math. Ann. 84, R. Courant, Congr. Intern. dei Mat. Bologna 1928).

Lüneburg, Göttingen.

Birnbaum, Z. W., und J. Schreier: Eine Bemerkung zum starken Gesetz der großen Zahlen. Studia Math. 4, 85—89 (1933).

Die Verf. betrachten ein gerechtes Spiel mit nur zwei möglichen Ergebnissen; als Spielsystem wird dabei eine beliebige Regel definiert, die den Einsatz des  $n$ -ten Spieles als Funktion der Ergebnisse der  $n-1$  vorangehenden Spiele festsetzt. Es wird bewiesen, daß der mittlere Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit 1 gegen Null konvergiert, wenn die Anzahl der Spiele unendlich groß wird und das Spielsystem so beschaffen ist, daß der Einsatz dem Absolutwerte nach unter allen Umständen beschränkt bleibt. Die Behauptung ist übrigens auch von vornherein einleuchtend, da es sich um eine Folge gleichmäßig beschränkter zufälliger Variablen handelt, die gegenseitig zwar abhängig, aber nicht korreliert sind, was bekanntlich eine hinreichende Bedingung für das „starke Gesetz der großen Zahlen“ ausmacht. A. Khintchine.

Auerbach, H.: Über die Fehlerwahrscheinlichkeit einer Summe von Dezimalzahlen. Z. angew. Math. Mech. 13, 386—388 (1933).

Unter der Annahme, daß für den Fehler der letzten Stelle einer Anzahl von Dezimalzahlen mit gleicher Stellenzahl jeder Wert zwischen  $-\frac{1}{2}$  und  $+\frac{1}{2}$  Einheiten der letzten Stelle gleich wahrscheinlich sei, wird die Wahrscheinlichkeit  $\varphi_n(x)dx$  berechnet, daß der Fehler einer Summe von  $n$  derartigen Dezimalzahlen zwischen  $x$  und  $x + dx$  liege.  $\varphi_n(x)$  genügt der Funktionalgleichung

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \varphi_n(\xi) d\xi$$

und wird als Lösung dieser Gleichung durch das Integral

$$\varphi_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^n \cos 2xt \, dt$$

bestimmt. Von dieser Darstellung ausgehend, erhält der Verf., indem er  $\frac{\sin t}{t}$  durch  $e^{-\frac{t^2}{6}}$  ersetzt, den asymptotischen Ausdruck:

$$\varphi_n(x) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{6}{n}}} e^{-t^2} \, dt.$$

Für den Fehler  $\Delta_n x$  ergibt sich dabei die Abschätzung

$$|\Delta_n(x)| < \frac{x}{2n^{3/2}} + \frac{2}{n \cdot 3^n}. \quad (n \geq 14)$$

Lüneburg (Göttingen).

**Neyman, J., and E. S. Pearson:** The testing of statistical hypotheses in relation to probabilities a priori. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 492–510 (1933).

The main question considered in this paper is: To what extent is it possible to employ tests of statistical hypotheses which are independent of probabilities a priori? In dealing with this question, the meaning of "independence" is first discussed. — A definition is given of the phrase "a test independent of the probability law a priori". Errors of two types are considered: I. Those of rejecting a hypothesis  $H_0$  when it is true. II. Those of accepting  $H_0$  when some alterate  $H_i$  is true. — An observed event is represented by a sample point, having coördinates  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in a space of  $n$  dimensions. In the region of all permissible hypotheses, there is a certain subregion of the sample space which is called the critical region for testing  $H_0$ . Two tests associated with critical regions  $w_1$  and  $w_2$  are defined as equivalent when the probabilities  $P_1(w_1)$  and  $P_1(w_2)$  of making an error of Type I are equivalent. Next, the probability of rejecting the hypothesis tested,  $H_0$ , when the true hypothesis is  $H_i$ , is termed the power of the critical region and is denoted by  $P(w/H_i)$  where  $w$  is the critical region. — If  $\Phi_i$  is the probability a priori that the true hypothesis is  $H_i$ , then  $\sum_{i=1}^m \{\Phi_i P(w/H_i)\}$  is called

the resultant power of the test. A test is said to be independent of the probabilities a priori  $\Phi_i$  if it is of greater resultant power than any other equivalent test. — It is shown that (1) a test with greater resultant power than a second test ensures a smaller risk of Type II errors, (2) a test of a hypothesis may be termed independent of the probabilities a priori, if it is of greater resultant power than any other equivalent test.

H. L. Rietz (Jowa).

**Bartlett, M. S.:** On the theory of statistical regression. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 53, 260–283 (1933).

It is shown that the product moment distribution can be split up into a chain of independent factors. Most of the known distributions relating to regression or partial correlation are simply obtained in a manner which indicates the relations they bear to each other. The distribution of a partial regression coefficient is also derived, and takes a form similar to that for a simple regression coefficient. — It is held that the assumption of a normal system of original items is not altogether necessary for some of the resulting distributions to be valid. To show minimum assumptions about normality necessary for the various distributions obtained, a generalized partial product moment distribution is obtained. For example, it is shown that the test of significance of the regression coefficient will depend simply on the normality of the residuals  $\xi_{2-1}$  rather than on that of the original items. — The paper is made more readable by stressing especially the analysis of the distribution for two and three variates. Rietz.



**Kolodziejezyk, Stanislaw:** Sur l'erreur de la seconde catégorie dans le problème de M. Student. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 814—816 (1933).

Im Laboratorium des Biometrischen Instituts Nencki in Warszawa sind — durch numerische Integration — Tafeln des Integrals:

$$p(\varepsilon, \varrho) = \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) z_0^{n-1}} \int_0^\infty s^{n-2} \cdot e^{-\frac{s^2}{2z_0^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{s-\varrho}{2} \cdot \frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \cdot ds$$

berechnet worden für  $\varepsilon = 0,01$  und verschiedene Werte von  $n$  und  $\varrho$ . Ein kleiner Auszug der Tafel wird hier abgedruckt. — Die numerischen Werte dieses Integrals sind nützlich bei der Beurteilung der Genauigkeit statistischer Messungen nach dem Vorgange Students (Biometrika **6**, 1—25) und den daran anknüpfenden Arbeiten von Neyman und E. S. Pearson (Biometrika **20**, 174—240 und Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **231**, 289—337).

*Burrau* (Kopenhagen).

**Gumbel, E.-J.:** La plus petite valeur parmi les plus grandes et la plus grande valeur parmi les plus petites. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 965—967 (1933).

**Gumbel, E. J.:** La distribution limite de la plus petite valeur parmi les plus grandes. C. r. Acad. Sci., Paris **197**, 1082—1084 (1933).

Es sei  $W(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dy$  die Verteilungsfunktion einer statistischen Variablen  $x$ .

Es werden die Funktionen  $w_m(x)$  bzw.  $w_{N-m}(x)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$  untersucht, die die Wahrscheinlichkeit angeben, daß von  $N$  Beobachtungen der statistischen Variablen die kleinste der  $m$  größten Beobachtungen bzw. die größte der  $m$  kleinsten Beobachtungen den Wert  $x$  besitze. Für diese Wahrscheinlichkeiten ergibt sich die Darstellung

$$w_m(x) = \binom{N}{m} m W^{N-m} (1 - W)^{m-1} w(x),$$

$$w_{N-m+1}(x) = \binom{N}{m} m W^{m-1} (1 - W)^{N-m} w(x).$$

Insbesondere wird in der ersten Note der sog. Mode  $\tilde{u}_m$  behandelt, d. h. derjenige Wert  $x$ , für den  $w_m$  bzw.  $w_{N-m}$  seinen größten Wert annimmt. Unter gewissen Voraussetzungen über  $w(x)$  ergibt sich dieser Wert aus den Gleichungen

$$W(u_m) = 1 - \frac{m}{N},$$

$$W(N-m+1) = \frac{m}{N}$$

[vgl. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1857—59 (1933) und dies. Zbl. **7**, 253.] In der letzten Note werden asymptotische Ausdrücke für  $w_m(x)$  und  $w_{N-m}(x)$  bei großem  $N$  und festem  $\tilde{u}_m$  bzw.  $\tilde{u}_{N-m}$  entwickelt, und zwar gilt:

$$w_m(x) \sim \frac{m^m}{(m-1)!} \frac{N}{m} w(\tilde{u}_m) e^{-m(y_m + e^{-y_m})},$$

$$y_m = \frac{N}{m} w(\tilde{u}_m) (x - \tilde{u}_m).$$

*Lüneburg* (Göttingen).

**Hope, A. E.:** A formula in the theory of correlation. Math. Notes Nr **28**, XIV—XVI (1933).

The formula is given for the product moment correlation between two variables based on  $n_1 + n_2$  observations in terms of the means, variances, and correlations of the sets of  $n_1$  and  $n_2$  observations taken separately. The corresponding formula is given for the like pooling of any number of groups of observations. *Cecil C. Craig*.

**Lenzi, Enrico:** Sul problema degli accumuli. Giorn. Mat. Finanz., II. s. **3**, 53—63 (1933).

Verf. behandelt das Problem des „capitali accumulati“, d. h. die mathematische Formel der Reserve einer Pensionskasse unter variierenden Umständen. Verf. meint,

die Lösung sei dieselbe, die Cantelli (dies. Zbl. 6, 70) durch eine Integralgleichung gegeben hat, wenn man die Hypothese von Bonferroni (dies. Zbl. 7, 23) „del prelevamento proporzionale“ akzeptiert, was, nach dem Verf., äußerst empfehlenswert ist. *Burrau* (Kopenhagen).

**Insolera, Filadelfo: Tirando le somme.** Giorn. Mat. Finanz., II. s. 3, 64–72 (1933).

Der Aufsatz stellt sich sehr polemisch gegen den im vorstehenden Referat genannten Aufsatz Lenzis. Die Existenz eines speziellen Problems „degli accumuli“ wird verneint, es sei nur das alte Zinsproblem, um das es sich handelt. Die Polemik bezieht sich jedoch nicht auf beide im vorstehenden Referat zitierten Verfasser, sondern nur auf die Lenzische Auffassung. *Burrau* (Kopenhagen).

**Usai, G.: Sui metodi di estrapolazione parabolica e dei quozienti e loro applicazione alle rendite vitalizie.** Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 514–529 (1933).

Der Verf. untersucht und vergleicht den Näherungsgrad, welchen einige bei der Berechnung von lebenslänglichen Renten verwendeten Extrapolationsverfahren liefern, und dies sowohl in bezug auf das genannte versicherungstechnische Problem, als auch von einem rein mathematischen Gesichtspunkte aus. *Bruno de Finetti*.

## Geometrie.

**Blumenthal, Leonard M., and George A. Garrett: Characterization of spherical and pseudo-spherical sets of points.** Amer. J. Math. 55, 619–640 (1933).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß  $n+1, n+2, n+3$  Punkte eines halbmétrischen Raumes (= Menge mit symmetrischem Abstand  $> 0$  für je 2 verschiedene Elemente; Dreiecksungleichung nicht verlangt) kongruent sind mit  $n+1, n+2, n+3$  Punkten der  $n$ -dimensionalen „Oberfläche“  $S_{n,r}$  der  $(n+1)$ -dimensionalen Kugel des Euklidischen  $E_{n+1}$  mit dem Radius  $r$  (wobei Kongruenz abstandstreue Abbildbarkeit ist und im  $S_{n,r}$  mit dem geodätischen Abstand gemessen wird). Diese Bedingungen sind Forderungen an die Vorzeichen von gewissen, durch die Abstände der Punkte untereinander und die Zahl  $r$  definierten symmetrischen Determinanten. Da nach Menger, auf dessen analoge Untersuchungen für den  $E_n$  statt  $S_{n,r}$  die ganze Fragestellung zurückgeht, ein halbmétrischer Raum genau dann mit einer Teilmenge des  $S_{n,r}$  kongruent ist, wenn jedes  $(n+3)$ -Tupel von Punkten des Raumes mit einem  $(n+3)$ -Tupel von  $S_{n,r}$  kongruent ist, so sind durch die obigen Bedingungen die halbmétrischen Räume gekennzeichnet, die mit Teilmengen von  $S_{n,r}$  kongruent sind. — Außerdem werden die  $(n+3)$ -Tupel von Punkten untersucht, die nicht mit einer Teilmenge von  $S_{n,r}$  kongruent sind, obwohl jedes Teil- $(n+2)$ -Tupel es ist. *Nöbeling* (Erlangen).

**Schmid, Wilhelm: Zur Theorie ebener Dreiecksnetze aus Kegelschnitten.** Mh. Math. Phys. 40, 411–417 (1933).

Verf. gibt einige Sätze über ebene Dreiecksnetze aus Kegelschnitten an. Der erste Satz betrifft die Mittelpunktskonfiguration der ebenen Dreiecksnetze aus Kurven 2. Ordnung eines linearen Systems zweiter Stufe, aus dem sich als Spezialfall die Kreise eines Kreisbündels ergeben, deren Mittelpunkte auf einer Kurve 3. Ordnung liegen. Ein 2. Satz behandelt die Mittelpunktskonfiguration der ebenen Dreiecksnetze aus Kegelschnitten mit gemeinsamem Poldreieck. Ferner wird sowohl mittels des Satzes 2 als auch direkt analytisch gezeigt, daß die Schnittlinien der Flächen 2. Klasse einer Schar mit einer Fläche 2. Ordnung  $\varphi$ , welche dasselbe Poltetraeder besitzt wie die Flächen der Schar, nach Dreiecksnetzen sich anordnen lassen; daraus folgt eine besondere Klasse von Dreiecksnetzen aus Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Poldreieck: nämlich diejenige, die aus den Projektionen der Schnittlinien der Flächen 2. Klasse einer Schar mit der Fläche  $\varphi$  aus einem Eckpunkt des gemeinsamen Poltetraeders auf dessen Gegenebene bestehen; die Mittelpunkte dieser Kegelschnitte



liegen auf einer rationalen Kurve 3. Ordnung; hiervon wird auch die Umkehrung zeigt. Volk (Würzburg).

**Boldt, H.: Raumgeometrie und Spiegelungslehre.** Math. Z. 38, 104—134 (1933).

Die Methode von Thomsen, die ebene Elementargeometrie mit Hilfe eines Gruppenskalküls aufzubauen, wird hier auf die räumliche Elementargeometrie angewandt, ein Problem, das Thomsen bereits in seinen „Grundlagen der Elementargeometrie“, Hamburg. math. Einzelschr. H. 15, 1933 (siehe dies. Zbl. 7, 361) kurz gestreift hat. Gegeben ist eine durch ihre involutorischen Elemente erzeugbare Gruppe  $G$ , deren Elemente in 3 elementfremde nicht leere Klassen geteilt sind. Die Elemente der 3 Klassen werden resp. Punkte, Geraden und Ebenen genannt. Weiter werden die Beziehungen der Inzidenz, des Parallelismus, des Senkrechtstehens usw. durch das Bestehen von Relationen zwischen den Elementen der Gruppe erklärt, die genau den Spiegelungsrelationen entsprechen, die sich ergeben, wenn man die genannten Lagebeziehungen mit Hilfe von Punkt-, Geraden- und Ebenenspiegelungen ausdrückt. Damit ist zu  $G$  eine Gruppengeometrie  $\Gamma$  definiert. Nun werden entsprechend wie bei Thomsen sukzessive für  $G$  Zusatzforderungen, die über die allgemeinen Gruppenaxiome hinausgehen, adjungiert und untersucht, welcher Bestand von elementargeometrischen Sätzen dann in  $\Gamma$  beweisbar ist. Im I. Teil unterwirft Verf. die Gruppe  $G$  7 Zusatzaxiomen, die bereits eine Reihe von geometrischen Sätzen liefern. Im II. Teil werden weitere 7 Zusatzaxiome adjungiert, die im Gegensatz zu den ersten wesentlich Existenzaxiome sind. Die räumliche Elementargeometrie wird jetzt mit Hilfe der Gruppe  $G$ , die diesen 14 Zusatzaxiomen genügt (diese Zusatzaxiome sind sämtlich erfüllt, wenn die Elemente der 3 Klassen von  $G$  resp. als Punkt-, Geraden- und Ebenenspiegelungen gedeutet werden), systematisch aufgebaut, indem mit Hilfe einer Hilbertschen Streckenrechnung zu der Gruppengeometrie  $\Gamma$  eine Körpergeometrie  $\Gamma^*$  hinzukonstruiert wird und nachgewiesen wird, daß  $G$  isomorph ist mit der aus den Punkt-, Geraden- und Ebenenspiegelungen erzeugten Gruppe der kongruenten Abbildungen der analytischen Geometrie  $\Gamma^*$ .

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

### Algebraische Geometrie:

**Edge, W. L.: Cayley's problem of the in-and-circumscribed triangle.** Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 142—171 (1933).

Die Aufgabe, die Anzahl aller einer ebenen algebraischen Kurve gleichzeitig ein- und umbeschriebenen Dreiecke anzugeben, wird auf die Aufgabe zurückgeführt, die Fixpunkte einer auf der Kurve definierten Korrespondenz zu bestimmen. Hierbei treten aufgabenfremde Lösungen auf, deren Multiplizitäten Schwierigkeiten machen. Verhältnismäßig einfach gelingt die Lösung im Falle einer  $C^4$  vom Geschlechte 3 (das Cayleysche Resultat war schon dies. Zb. 6, 77 vom Verf. bestätigt worden) und einer  $C^4$  mit beliebig vorgegebenen gewöhnlichen Singularitäten. Im Falle einer Kurve von beliebig vorgegebener Ordnung muß die Regel von Zeuthen angewandt werden, mit deren Hilfe in einem besonderen Abschnitt ausführlich untersucht wird, wie viele fremde Lösungen auf Grund einer Bitangente, eines Doppelpunktes, einer Spitze und eines Wendepunktes auftreten. Ein letzter Abschnitt beschäftigt sich mit der Anzahl der einer  $C^4$  vom Geschlechte 3 gleichzeitig ein- und umbeschriebenen Polygone ( $n = 4, 5, \dots, 10$ ).

E. A. Weiss (Bonn).

**Gallina, Gallo: Su una nuova forma canonica della ternaria cubica.** Pavia: Premiata. Tipogr. Succ. Fratelli Fusi 1933. 3 S.

Berichtigung zu der Arbeit von E. Ciani, dies. Zbl. 4, 269: Die Bestimmung der Tangentialdreiecke einer ebenen elliptischen Kurve 3. Ordnung mit Hilfe ihrer Parameterdarstellung ergibt, daß die Kurve auch im äquianharmonischen Falle nur 24 Tangentialdreiecke besitzt.

E. A. Weiss (Bonn).

**Cattaneo, Paolo: Su una curva covariante del sistema di una retta e di una cubica complanari.** Boll. Un. Mat. Ital. 12, 313—317 (1933).

**Duncan, D. C.:** A plane elliptic curve of order  $4k + 2$ , with singularities all real and distinct, and autopolar by  $4k + 4$  conics. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 809—813 (1933).

Polare und kartesische Gleichungen einer elliptischen autodualen ebenen Kurve der Ordnung  $4k + 2$ , mit  $(2k + 1)(4k - 3)$  gewöhnlichen Doppelpunkten und  $4k + 2$  Spitzen, die von  $2(4k + 2)$  Korrelationen in sich verwandelt wird; von diesen  $2(4k + 2)$  Korrelationen sind  $4k + 4$  involutorisch. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Fladt, Kuno:** Die Umkehrung der ebenen quadratischen Cremonatransformation. J. reine angew. Math. **170**, 64—68 (1933).

A derivation of the explicit algebraic conditions in order that a rational plane quadratic transformation  $\varrho \bar{x}^i = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 A_{\alpha\beta}^i x_\alpha x_\beta = \varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) be birational, equivalent to the conditions that the 3 conics  $\varphi_i = 0$  be on 3 common points. *Zariski*.

**Burniat, Pol:** Sur les points fondamentaux des transformations birationnelles de l'espace. II. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **18**, 867—876 (1932).

**Burniat, Pol:** Sur les points fondamentaux des transformations birationnelles de l'espace. III. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **18**, 923—936 (1932).

**Burniat, Pol:** Sur les points fondamentaux isolés des transformations birationnelles de l'espace. IV. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 163—178 (1933).

**Longhi, Ambrogio:** Sui sistemi algebrici semplicemente infiniti di complessi lineari di rette. Ist. Lombardo, Rend. II. s. **66**, 771—785 (1933).

Eine algebraische Kurve vom Grade  $\nu$  und Geschlecht  $\pi$  in  $S_5$  definiert, wenn man die Punkte des  $S_3$  auf die linearen Komplexe des Raumes  $S_3$  abbildet, ein System  $\Sigma$  von  $\infty^1$  linearen Strahlenkomplexen, von denen je  $\nu$  einen gegebenen Strahl enthalten. Durch Übertragung bekannter Sätze über Kurven des  $S_5$  auf den  $S_3$  erhält Verf. eine lange Reihe von Eigenschaften der Systeme  $\Sigma$ , von denen hier nur einige erwähnt werden mögen.  $\Sigma$  enthält  $2\nu$  spezielle Komplexe oder besteht ganz aus solchen. Die Anzahl der Strahlen, für welche 5 von den  $\nu$  sie enthaltenden Komplexe von  $\Sigma$  zusammenfallen, beträgt  $10(\nu + 4\pi - 4)$ . Ebenso werden andere Koinzidenzzahlen bestimmt. Die Paare involutorischer Komplexe von  $\Sigma$  schneiden sich in  $\infty^1$  linearen Kongruenzen, deren Richtlinien eine Regelfläche vom Grade  $2\nu(\nu - 1)$  mit  $2\nu$   $\nu$ -fachen Strahlen bilden. Es gibt  $\infty^1$  quadratische Regelscharen, welche in je 4 Komplexen von  $\Sigma$  enthalten sind; ihre Vereinigung ist eine Kongruenz vom Feldgrad und Bündelgrad  $3\binom{\nu-2}{4} - (\nu - 3)(\nu - 5)\pi + \binom{\pi}{2}$ . Die Achsen der Komplexe von  $\Sigma$  bilden eine Regelfläche der Ordnung  $3\nu - k$ , wo  $k$  die Anzahl der speziellen Komplexe mit uneigentlichen Achsen ist, die zu  $\Sigma$  gehören. Wendet man diese Sätze speziell auf das System der oskulierenden Komplexe einer Regelfläche an, so erhält man Sätze über Regelflächen; insbesondere für Berührungsprobleme (mehrfach berührende Strahlen) ist diese Methode besonders geeignet. *van der Waerden* (Leipzig).

**Telling, H. G.:** Reality distinctions for the rational twisted quartic. Proc. Cambridge Philos. Soc. **29**, 470—477 (1933).

Die gestaltliche Einteilung der rationalen Raumkurven 4. Ordnung  $\gamma$  wird hier wieder gefunden. Die Kurve  $\gamma$  wird als Projektion einer rationalen normalen  $C^4$  eines Raumes  $S_4$  betrachtet; und je nach der Lage des Projektionszentrums in bezug auf die  $C^4$  erhält man die verschiedenen Arten der Kurve  $\gamma$ . Die wichtigste Rolle spielen hier die Darstellung der Gleichungen 4. Grades mit den Punkten des Raumes  $S_4$ , und die betreffende Diskriminantenmannigfaltigkeit, welche eine  $V_3^6$  ist, und aus den oskulierenden Ebenen der normalen  $C^4$  besteht.  $V_3^6$  besitzt eine Doppelfläche  $K$  vierter Ordnung, Ort der Schnittpunkte der Paare von oskulierenden Ebenen der Kurve  $C^4$ ; und diese spielt auch in der Diskussion eine wichtige Stelle. — Schließlich die Diskussion der asymptotischen Linien einer Steinerschen Fläche vom reellen Standpunkte



aus. — In der Literatur fehlt: F. Enriques und O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni ecc.*, III. s. 233—237. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Bronowski, J.:** The normal rational septic surface with two skew double lines in space of four dimensions. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29**, 478—483 (1933).

Wenn eine  $V_3^4$ ,  $G$ , eines Raumes  $S_5$ , zwei Ebenen  $M_1$ ,  $M_2$  enthält, so ist sie rational, und kann auf eine Hyperebene  $\pi$  eindeutig abgebildet werden, wenn man jedem Punkt  $P$  von  $G$  den Schnittpunkt von  $\pi$  mit der durch  $P$  hindurchgehenden Transversale der beiden Ebenen  $M_1$ ,  $M_2$  entsprechen läßt. Der Schnittfläche von  $G$  mit einem Raume  $S_3$  entspricht auf  $\pi$  eine rationale Fläche  $F^7$  mit zwei windschiefen Doppelgeraden. Diese Fläche wird hier untersucht; auf eine Ebene und auf eine Fläche 2. Ordnung abgebildet; und schließlich verallgemeinert (zu einer  $F^{2j-1}$  eines Raumes  $S_j$ , mit zwei windschiefen Doppelgeraden). *E. G. Togliatti* (Genova).

**Archbold, J. W.:** The algebraic surfaces contained by a cubic primal in four dimensions. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29**, 484—486 (1933).

Beweis eines Satzes von G. Fano [*Atti Accad. Torino* **39**, 597 (1903—1904)] über die algebraischen Flächen die auf einer ebenenfreien  $V_3^3$  des Raumes  $S_4$  liegen. Verf. betrachtet auf  $V_3^3$  geeignete  $\infty^2$  Geradensysteme, findet ihre Fundamentalflächen (oder beweist, daß solche nicht existieren), und wendet einen Äquivalenzsatz von F. Severi an [*Atti Ist. Veneto* **70**, 373 (1910—1911)]. *E. G. Togliatti*.

**Du Val, Patrick:** Note on surfaces whose prime sections are hyperelliptic. *J. London Math. Soc.* **8**, 306—307 (1933).

Die Nicht-Regelflächen, deren hyperebene Schnitte hyperelliptisch vom Geschlechte  $p$  sind, können (C. Segre, *Math. Enzyklopädie* III C 7, 921) auf eine der beiden folgenden Arten auf die Ebene abgebildet werden: ( $A$ ) mit Hilfe von Kurven  $C^{p+3}$  mit einem  $(p+1)$ -fachen und einem von ihm verschiedenen doppelten Basispunkt, ( $B_k$ ) mit Hilfe von Kurven  $C^{p+2+k}$  und einem  $(p+k)$ -fachen und  $k$  unendlich benachbarten doppelten Basispunkten. Es wird nun gezeigt, daß diese Flächen sich in 2 Klassen einteilen lassen: Die Flächen  $B_k$  mit geradem  $k$  können als Spezialfälle der Flächen  $B_0$ , die Flächen  $B_k$  mit ungeradem  $k$  als Spezialfälle der Flächen  $A$  aufgefaßt werden. Je nachdem dann  $p$  ungerade oder gerade ist, können die Flächen vom Typus  $A$  oder  $B_0$  auf rationale normale Regelflächen  $(p+1)$ -ter Ordnung mit Hilfe der  $F^2$ -Schnitte dieser Regelflächen abgebildet werden. Die übrigen Flächen lassen eine Abbildung mit Hilfe von  $F^2$ -Schnitten nicht zu. *E. A. Weiss* (Bonn).

**Bronowski, J.:** Surfaces whose prime sections are hyperelliptic. *J. London Math. Soc.* **8**, 308—312 (1933).

Eine Behauptung von F. Palatini verbessernd, bestimmt Verf. im  $R_{3p+5}$  alle Flächen  $F$ ,  $F'$  derart, daß durch einen Punkt allgemeiner Lage des  $R_{3p+5}$  kein ( $F'$ ) oder ein einziger ( $F$ ) durch  $p+2$  Punkte der Fläche bestimmter Raum  $R_{p+1}$  läuft. Zu diesen Flächen gehören solche, deren hyperebene Schnitte hyperelliptisch sind, und für sie ist die Unterscheidung von Flächen  $F$  und  $F'$  dieselbe wie die oben von P. Du Val mit Hilfe der Abbildung durch  $F^2$ -Schnitte gemachte. *E. A. Weiss* (Bonn).

**Hodge, W. V. D.:** The geometric genus of a surface as a topological invariant. *J. London Math. Soc.* **8**, 312—319 (1933).

Let  $a = \|(I_1 \cdot I_1) \cdot (I_1 \cdot I_1)\|$  be the symmetric matrix of the intersection numbers of the cycles  $I_1, I_2, \dots, I_{R_2}$  forming a fundamental base for the 2-cycles of an algebraic surface of geometric genus  $p_g$ . Using the properties of harmonic integrals attached to analytic metric manifolds, established by the author in another paper, the author derives the following interesting topological significance of  $p_g$ : if  $a$  is reduced to the diagonal form by the usual transformation  $\lambda a \lambda'$ , then the number of negative terms of the transformed matrix is  $2p_g + 1$ . In the case of a rational surface  $2p_g + 1$  gives, however, the number of positive terms, and the author explains this deviation from his result by the "unusual—arrangement of parameters". It is not clear in what this unusual arrangement consists. An odd number of negative

terms would imply that always  $|a| < 0$ , which is not true. The result would seem more natural if  $2p_g + 1$  gave the number of positive terms. O. Zariski (Baltimore).

### Differentialgeometrie:

Deaux, R.: Sur la courbure des surfaces gauches. Mathesis 47, 382—387 (1933).

Cohn-Vossen, S.: Sur la courbure totale des surfaces ouvertes. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1165—1167 (1933).

Es ist eine bekannte Folgerung der Gauß-Bonnetschen Formel der Flächentheorie, daß die Curvatura integra (Flächenintegral der Gaußschen Krümmung) einer geschlossenen Fläche gleich den  $2\pi$ -fachen der Eulerschen Charakteristik ist. Der Verf. teilt hier einen ganz neuartigen Satz mit, der eine entsprechende Beziehung zwischen differentialgeometrischen und topologischen Eigenschaften bei offenen Flächen herstellt. Es werden unberandete, singularitätenfreie, abstrakte Flächen im Sinne der Topologie betrachtet, die mit einer überall regulären Riemannschen Metrik versehen sind. Die Flächen werden ferner als normal (E. Cartan, Géométrie des espaces de Riemann, Paris 1928, S 64—65) oder vollständig (H. Hopf u. W. Rinow, dies. Zbl. 2, 350) vorausgesetzt, d. h. jede im Sinne der Metrik beschränkte unendliche Menge von Flächenpunkten soll kompakt sein. Das Hauptergebnis des Verf. lautet: Ist  $S$  eine Fläche der angegebenen Art mit endlicher Eulerscher Charakteristik  $\chi$  und  $M$  ein beschränktes Teilgebiet von  $S$ , so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $M$  enthaltendes Teilgebiet, dessen Curvatura integra kleiner als  $2\pi\chi + \varepsilon$  ist. Insbesondere erhält man hieraus: Existiert die Curvatura integra der ganzen Fläche, so ist sie kleiner oder gleich  $2\pi\chi$ . Eine weitere Folgerung ist: Wenn auf der ganzen Fläche  $S$  die Gaußsche Krümmung positiv ist, so ist  $S$  homöomorph der Kugel, der projektiven Ebene oder der euklidischen Ebene. — Die genannte Beziehung zwischen der Curvatura integra und der Charakteristik kann nicht verschärft werden. — Beweise sollen an anderer Stelle veröffentlicht werden. W. Fenchel (Kopenhagen).

Sonne, Herbert: Verallgemeinerung eines Satzes von Beltrami. Jena: Diss. 1933. 39 S.

Beltrami hat in den Nouv. Ann. de Math., II. s. 4, 258—267 (1865) den Satz bewiesen, daß der Krümmungshalbmesser einer Asymptotenlinie auf einer beliebigen Fläche immer zwei Drittel des Krümmungshalbmessers derjenigen Schnittkurve ist, die von der Tangentialebene in dem betrachteten Punkte erzeugt wird. Der Verf. betrachtet entsprechend zuerst ebene Schnitte an beliebigen Regelflächen, die längs einer Raumkurve erzeugt werden, und vergleicht den Krümmungshalbmesser des ebenen Schnitts mit der Krümmung und Torsion der Raumkurve. Hernach werden allgemeinere Flächen in Betracht gezogen. So werden verschiedene Sätze abgeleitet, unter denen sich auch ein „Spezialfall“ des Satzes von Beltrami befindet (S. 21).

K. Kommerell (Tübingen).

Gambier, Bertrand: Lignes de raccord de surfaces; lignes géodésiques, lignes ombilicales, lignes de courbure. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1274—1276 (1933).

L'auteur généralise le théorème de M. Scheffers [Math. Z. 36, 293 (1932; ce Zbl. 5, 179)]. — Soit  $\Gamma$  une trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface réglée  $R$ . Si  $R$  possède deux directrices rectilignes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , les  $\infty^1$  complexes linéaires contenant la congruence linéaire d'axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  déterminent chacun un déplacement hélicoïdal au cours duquel  $\Gamma$  engendre un hélicoïde. Tous ces  $\infty^1$  hélicoïdes se raccordent le long de  $\Gamma$ . — Si  $R$  est une développable et son arête de rebroussement  $\gamma$  est tracé sur une surface  $\Sigma$ , l'auteur considère les surfaces  $S$  dont les normales appartiennent au complexe des tangentes de  $\Sigma$ . La surface  $S$  issue de  $\Gamma$  le contient comme une ligne de courbure singulière (le lieu d'ombilics) si  $\gamma$  n'est pas géodésique sur  $\Sigma$ . — Si  $F$  est un faisceau de complexes dont la congruence commune contient  $R$  comme une développable, les surfaces  $S$  issues de  $\Gamma$  et qui correspondent aux divers complexes de  $F$  se raccordent le long de  $\Gamma$  qui est leur ligne ombilicale commune. S. Finikoff.



**Goursat, E.:** Sur un problème de la théorie des congruences de droites. C. r. Acad. Sci., Paris **197**, 1073—1075 (1933).

Explizite Integration der Differentialgleichung der Geradenkongruenzen, die eine gegebene abwickelbare Fläche zur Mittelfläche haben. *Willy Feller* (Kopenhagen).

**Delens, Paul:** Sur les congruences isothermes. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1163 bis 1165 (1933).

Kurz zusammengefaßte Darstellung der Ergebnisse einer Arbeit, welche zugleich angekündigt wird. Sie beschäftigt sich mit der allgemeinen Lösung eines Problems von Bouligand [rechercher les congruences (réelles)  $u(x, y, z) = \alpha$ ,  $v(x, y, z) = \beta$ , telles qu'il existe des fonctions  $\varphi(u, v)$  harmoniques en  $(x, y, z)$  dans un tube de lignes de la congruence, les valeurs de  $\varphi$  à la surface de ce tube pouvant être arbitraires sur chaque ligne de la congruence]. Die betreffenden Kongruenzen werden hier nach ihren Eigenschaften kurz klassifiziert. So z. B. die Kongruenzen, welche mittels

$$\Delta_1 U = \Delta_1 V = 0, \quad \frac{\Delta_2 U}{\Delta(U, V)} = F(U, V), \quad \frac{\Delta_2 V}{\Delta(U, V)} = G(U, V)$$

charakterisiert werden ( $U, V$  sind konj. komplex,  $F, G$  beliebige konj. Funktionen) die Lösung  $\varphi$  gestatten, welche der Gleichung

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} + P(uv) \varphi_u + Q(uv) \varphi_v = 0$$

genügt.

*Hlavatý* (Praha).

**Bouligand, Georges:** Sur un problème de la théorie du potentiel. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1179—1180 (1933).

En chaque point  $Q$  de la frontière  $\Sigma$  d'un domaine borné  $\Omega$  situé dans l'espace euclidien à trois dimensions, on donne une direction  $\vec{u}_Q$ ; on demande de trouver une fonction  $h(P)$ , harmonique dans  $\Omega$ , connaissant en chaque point  $Q$  de  $\Sigma$  la dérivée de  $h$  dans la direction  $\vec{u}_Q$ ; tel est le problème dont il s'agit. Dans le cas où  $\vec{u}_Q$  n'est nulle part tangent à  $\Sigma$ , la solution est contenue, moyennant certaines hypothèses de régularité, comme cas particulier dans un travail de Georges Giraud [indications in C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 454—456 (1932); ce Zbl. **5**, 163]. En conséquence l'aut. s'occupe des cas où  $\vec{u}_Q$  est tangent à  $\Sigma$  en certains points: il cite différents cas particuliers, dans certains desquels le problème est largement indéterminé, pendant que dans d'autres il y a une infinité de conditions de possibilité. Certains cas s'obtiennent par la considération de congruences dont il passe une seule courbe par chaque point de  $\Omega + \Sigma$ , et dont les courbes engendrent des familles de surfaces isothermes [voir Delens, C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1163 (1933); voir le réf. préc.]. *G. Giraud*.

**Rozet, O.:** Sur certaines congruences  $W$ . Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 179 bis 186 (1933).

Durch jeden Punkt  $x$  einer Fläche ( $x$ ) führe man eine Gerade  $g_1$ , die nicht in der Tangentenebene von ( $x$ ) in  $x$  liegt; sei  $g_2$  die reziproke Polare von  $g_1$  in bezug auf die Liesche  $F_2$  von ( $x$ ) in  $x$ . Die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  erzeugen zwei Linienkongruenzen ( $g_1$ ) und ( $g_2$ ). Es werden die Bedingungen bestimmt, unter denen ( $g_1$ ) oder ( $g_2$ ) eine  $W$ -Kongruenz ist. Diese Bedingungen sind ziemlich verwickelt. Eine verhältnismäßig große Vereinfachung tritt in dem Falle ein, wo ( $g_1$ ) bzw. ( $g_2$ ) aus einer Schar von asymptotischen Tangenten einer Fläche besteht. *Čech* (Brno).

**Demoulin, A.:** Sur les systèmes  $C$  et sur les congruences de sphères  $C$ . Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 870—876 (1933).

Dans un espace linéaire  $E_n$  un  $k$ -plan est le lieu des points dont les coordonnées cartésiennes satisfont à  $n - k$  relations linéaires; une  $k$ -sphère est le lieu des points situés dans un  $(k + 1)$ -plan et dont la distance à un point fixe est constante. Cela posé, le système  $C$  est le lieu des  $(n - 2)$ -sphères  $S$  dépendant de deux paramètres  $u, v$  et jouissant la propriété, à savoir:  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  (les focales de  $S$ ) étant deux  $(n - 1)$ -sphères orthogonales,  $S$  est la caractéristique de  $\Sigma$ ,  $u$  variant seul, et de  $\Sigma_1$ ,  $v$  variant seul. — Faisant correspondre les droites de  $E_{n+2}$  aux  $(n - 1)$ -sphères de  $E_n$ , l'auteur établit

une transformation  $R$  (= de Ribaucour) entre deux  $(n-2)$ -sphères  $S$  et  $S'$  dont les focales  $\Sigma, \Sigma_1$  et  $\Sigma', \Sigma'_1$  ont pour image dans  $E_{n+2}$  les tangentes des lignes des deux réseaux  $O$  en transformation  $R$ . Les sphères  $S$  et  $S'$  appartiennent à une  $(n-1)$ -sphère  $\Phi$  qui engendre une congruence  $C$ . — Si  $n=4$ , faisons correspondre aux points de  $E_4$  les droites de  $E_3$  dont les coordonnées Kleinéennes sont égales aux coordonnées hexasphériques du point. Les foyers  $F, G$  de  $S$  [= les centres des  $(n-1)$ -sphères de rayons nuls contenant  $S$ ] correspondent aux droites  $f, g$  qui engendrent le couple la plus général de congruences stratifiables. De même, les droites  $f', g'$  — les images des foyers  $F', G'$  de  $S'$ , engendrent un autre couple stratifiable qui est en transformation  $R$  avec le premier. Si  $p$  est un rayon d'une congruence  $W$  associée qui coupe  $f$  et  $g$  en  $A$  et  $B$ ,  $p'$  — le rayon homologue qui coupe  $f'$  et  $g'$  en  $A'$  et  $B'$ , les droites  $AA', BB'$  engendrent deux congruences  $W$  aux foyers  $A, B, A', B'$ ; les droites  $AA', BB'$  — un couple stratifiable. La discussion analogue des cas  $n=5$  et  $n=6$ . *Finikoff*.

**Knothe, Herbert:** Zur differentiellen Liniengeometrie einer zwölfgliedrigen Gruppe. Math. Z. 38, 45—69 (1933).

Verf. untersucht Regelflächen und Strahlensysteme gegenüber der 12-gliedrigen Gruppe ( $G_{12}$ ) der reell-dualen Kollineationen, die die reell-duale Einheitskugel in sich überführen. Ordnet man nach Studys Übertragungsprinzip die Geraden des Raumes den dualen Punkten der Einheitskugel zu und projiziert die Kugel stereographisch auf die komplex-duale Zahlenebene, so entsprechen der  $G_{12}$  die linear-gebrochenen Transformationen der komplex-dualen Zahlenebene. Eine für das folgende wichtige Interpretation der  $G_{12}$  erhält man, indem man die reellen gerichteten Geraden eineindeutig den Minimalebenen zuordnet; unterwirft man die Minimalebenen den komplexen Bewegungen, so induzieren diese die  $G_{12}$  im Geradenraum. Die  $G_{12}$  wurde bereits von Blaschke [Mh. Math. Phys. 21, 201—308 (1910)] untersucht. Die einfachsten invarianten Gebilde des Geradenraumes sind die Garbe, die Speerkette und die Speerkugel. Unter einer Garbe versteht man die Gesamtheit der reellen Geraden, die auf den durch einen festen Punkt gehenden Minimalebenen liegen. — Das Studium der Regelflächen läßt sich zurückführen auf die Untersuchung der isotropen Kurven im komplexen Raum: Die den Geraden der Regelflächen zugeordneten Minimalebenen umhüllen eine isotrope Kurve. Es wird gezeigt, daß sich aus 3 Invarianten alle übrigen Invarianten einer Regelfläche  $R$  bestimmen lassen. Ferner ist jeder Regelfläche  $R$  eine zweite Regelfläche  $E$  invariant zugeordnet. Die geometrische Deutung der 3 Invarianten und der Fläche  $E$  gelingt mit Hilfe bestimmter Garben (Schmiegarbe) und Garbenbüschel, die mit der Umgebung einer Erzeugenden von  $R$  invariant verbunden sind. — Die Ebenen, die in den Mittelpunkt eines isotropen Strahlensystems senkrecht zu den Strahlen errichtet werden, umhüllen nach Ribaucour eine Minimalfläche. Verf. stellt sich die Frage: Wie verhält sich diese Minimalfläche, wenn man das zugehörige Strahlensystem einer Transformation der  $G_{12}$  unterwirft? Es wird gezeigt, daß die Krümmungslinien der Ribaucourschen Minimalfläche in die Krümmungslinien der zu dem transformierten Strahlensystem gehörenden Minimalfläche übergehen. — Unterwirft man ein Strahlensystem einer Transformation der  $G_{12}$ , so gehen die Hauptflächen wieder in Hauptflächen über. Die Differenz  $J$  der Hauptdralle ist die einzige Diff.-Invariante 1. Ordnung eines Strahlensystems gegenüber der  $G_{12}$ . Es wird der Satz bewiesen: Durch jeden Systemstrahl gehen  $\infty^1$  Regelflächenpaare, deren reelle sphärische Bilder orthogonale Kurvennetze liefern, die das reelle Netz der Hauptflächen isogonal schneiden. Legt man in einem Strahl des Systems an beide Flächen eines solchen Paares die Schmiegarben, so haben diese beiden Garben noch einen zweiten Strahl gemeinsam. Diese  $\infty^1$  Geraden, die zu den durch einen Systemstrahl hindurchgehenden Regelflächenpaaren gehören, sind alle einander parallel. Im Falle  $J = \text{konst.}$  fallen die  $\infty^1$  Geraden in eine Gerade zusammen. — Insbesondere geben die zweiten Schnittgeraden der Schmiegarben an die Hauptflächen des Systems ein mit dem gegebenen Strahlensystem invariant verbundenes Strahlensystem, welches zur geometrischen Deutung der Diff.-Invarianten 3. Ordnung nützlich ist. — Nach der Untersuchung des vollständigen Invariantensystems werden einige spezielle Strahlensysteme betrachtet. Schließlich wird eine parameter-invariante Darstellung der Grundformeln angegeben und auf Beziehungen zur Möbiusgeometrie hingewiesen.

**Pinl, Max:** Der Asymptotenkegel der Minimalhyperflächen. S.-B. Berlin. math. Ges. 32, 21—26 (1933).

A minimal hypersurface is a  $V_n$  in  $R_{n+1}$  which annuls the first variation of the  $n$ -dimensional volume integral. Such a hypersurface is characterized by the condition  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = 0$ ,  $\frac{1}{R_i}$  denoting the principal curvatures. A classification is made



according to the vanishing or not of the other coefficients in  $(x - \frac{1}{R_1})(x - \frac{1}{R_2}) \dots (x - \frac{1}{R_n})$ . A result due to C. Wilder (Trans. Amer. Math. Soc. 1923) is reobtained: that the asymptotic cone of a minimal  $V_n$  is equilateral, and conversely. The dual is proved: that if the asymptotic cone is equiangular,  $\sum_{i=1}^n R_i = 0$ , and conversely.

Hypersurfaces generated by the translation of isotropic curves and higher isotropic manifolds (null manifolds) are considered—the first are not minimal beyond  $n = 2$ . Mention is made of a theorem of R. Frucht concerning hypersurfaces with conformal hyperspherical representation: either  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \dots = \frac{1}{R_n}$  or  $-\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \dots = \frac{1}{R_n}$ .  
Douglas (Cambridge, Mass., U.S.A.).

Hlavatý, V.: Über eine Art der Punktkonnexion. Math. Z. 38, 135–145 (1933).  
In einem  $X_n$  sind die  $n + 1$  überzähligen unabhängigen Koordinaten

$$x^\kappa (\kappa, \lambda, \mu \dots = 0, 1, \dots, n)$$

der Gruppe von analytischen und umkehrbaren Transformationen

$$x^{h'} = x^h(x^0, \dots, x^n), \quad x^{0'} = x^0; \quad (h, i, j \dots = 1, \dots, n) \quad (1)$$

unterworfen. Unter einem kontravarianten Punkt wird das Verhältnis von  $n + 1$  Bestimmungszahlen  $v^*$  verstanden, welche sich transformieren wie  $dx^\kappa$ . Wegen der besonderen Form der Transformationen (1) ist in jedem Lokalraum der kovariante Punkt  $t_\lambda = s \delta_\lambda^0$  ( $s$  ist ein beliebiger Skalar) ausgezeichnet. Mittels einer Punktkonnexion  $\Phi_{\mu\lambda}^{\nu}$  bildet Verf.  $D_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Phi_{\mu\lambda}^{\nu} v^\lambda$ , die kovariante Ableitung des Punktes  $v^*$  genannt, obwohl der Punkt  $v^*$  (das Verhältnis der Bestimmungszahlen  $v^*$ )  $D_\mu v^\nu$  nicht bestimmt. Zwei Punkte  $v^\lambda$  und  $w^\lambda$  bestimmen einen Vektor  $p^i$ ;  $p^i = \frac{v^i}{v^0} - \frac{w^i}{w^0}$ . Umgekehrt bestimmt der Vektor  $v^*$  und  $w^*$  nicht, woraus hervorgeht, daß nur für spezielle Punktkonnexionen ( $\Phi_{\mu\lambda}^0 = 0$ ) die kovariante Ableitung eines Vektors eindeutig ist. Es wird gezeigt, daß die Geometrie von Herrn Wundheiler [Kovariante Ableitung und die Cesàroschen Unbeweglichkeitsbedingungen, Math. Z. 36, 104–109 (1932); dies. Zbl. 5, 25] ein Spezialfall dieser Geometrie ist. — Betrachtet man die Koordinaten  $x^\kappa$  als nicht überzählige Koordinaten in einem  $X_{n+1}$ , so gibt es eine ausgezeichnete Hyperflächenfamilie ( $x^0 = \text{konst.}$ ). In jeder dieser Hyperflächen wird eine Konnexion induziert mittels einer Einspannung  $n^*$ . Es zeigt sich, daß für spezielle Konnexionen diese Hyperflächen geodätisch sind, wodurch die induzierte Konnexion von  $n^*$  unabhängig wird.

J. Haantjes (Delft).

Kawaguchi, Akitsugu: Theory of connections in the generalized Finsler manifold.

III. Proc. Imp. Acad. Jap. 9, 347–350 (1933).

Der Verf. verallgemeinert hier die früheren Resultate (vgl. — auch wegen der Bezeichnung — dies. Zbl. 2, 158; 5, 414; 6, 32) in dem Sinne, daß er neben den Grundkonnexionenkoeffizienten auch noch Affinoren  $A_{\lambda\mu}^i$  der Klasse  $-i$  zuläßt. Diese geben dann zu einer Art „kovarianter Ableitung“

$$\overset{i}{V}_\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial \overset{i}{x}^\mu} + A_{\lambda\mu}^{\nu i} v^\lambda$$

Anlaß, so daß

$$\delta v^\nu = dx^\mu \overset{i}{V}_\mu v^\nu + \sum_i \overset{i}{\delta} x^\mu \overset{i}{V}_\mu v^\nu.$$

Die Ausrechnung von  $V_{[\mu} V_{\lambda]} v^\nu$ ,  $\overset{i}{V}_{[\mu} V_{\lambda]} v^\nu$ ,  $\overset{i}{V}_{[\mu} \overset{j}{V}_{\nu]} v^\nu$  rechtfertigt die Einführung von verschiedenen Krümmungsgrößen. Es zeigt sich, daß diese Theorie einen Cartanschen Fall des Finslerschen Raumes [C. R. Acad. Sci., Paris 196, 582–586 (1933); dies. Zbl. 6, 225 (Cartan)] als Spezialfall enthält.

Hlavatý (Praha).

**Kawaguchi, Akitsugu: The foundation of the theory of displacements.** Proc. Imp. Acad. Jap. 9, 351—354 (1933).

Der Verf. hat in früheren Arbeiten eine Verallgemeinerung des Begriffes „lineare Konnexion“ eingeführt und eingehend studiert (vgl. dies. Zbl. 2, 158, 5, 414, 6, 32). In dieser Arbeit gibt er eine solche Begründung der Übertragungslehre an, welche die üblichen Theorien (sowie auch die des Hilbertschen Raumes) umfaßt. Der stützende Punkt ist die Einführung der abstrakten Übertragung und der abstrakten Räume mit Hilfe eines von Banach (Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932) benutzten Raumbegriffes. Die abstrakte Übertragung genügt dabei den drei Veblen-Whiteheadschen Axiomen (The foundations of differential Geometry 1932). Für die Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *Hlavatý (Praha).*

## Astronomie und Astrophysik.

**Brendel, M.: Zur Theorie der großen Planeten.** Astron. Nachr. 250, 177—208 (1933).

Die von Brendel entwickelte Methode zur Störungsrechnung der kleinen Planeten läßt sich auch auf die großen Planeten mit Nutzen anwenden. Merkmale der Brendelschen Theorie sind: 1. Als unabhängige Veränderliche wird nicht die Zeit, sondern eine einfache Funktion der wahren Länge eines der beiden Planeten eingeführt. Dadurch werden die schwach gestörten Bahnteile zeitlich mehr zusammengefaßt als die gegen Störungen empfindlicheren Abschnitte. 2. Abhängige Veränderliche sind die üblichen geometrischen Bahnelemente oder einfache Funktionen dieser Größen. 3. Die Störungsfunktion und ihre Ableitungen nach den Bahnelementen werden in der Form von Fourierreihen benützt. Die Fourierkoeffizienten werden nicht durch Potenzentwicklung (z. B. nach Potenzen der Exzentrizitäten, Neigungen wie bei Leverrier), sondern interpolatorisch (z. B. wie bei Gauß) gewonnen. Die wesentlichen Vorzüge dieses Verfahrens bestehen in einer Steigerung der „praktischen Konvergenz“ der Reihenentwicklungen. An dem Beispiel des Systems Jupiter-Saturn werden die einzelnen Phasen der Störungsrechnung auseinandergesetzt. An Resultaten werden mitgeteilt die Störungen der Ellipsenparameter  $p$  und  $p'$  und der Exzentrizitätsvariablen  $e \sin \pi$ , ... unter Vernachlässigung aller Glieder, deren Amplituden kleiner als  $0^{\circ}01$  sind. *A. Klose (Berlin).*

**Jensen, Henry: Eine Tafel zur Erleichterung der Hypothesenrechnung bei parabolischer Bahnbestimmung.** Astron. Nachr. 250, 209—230 (1933).

B. Strömgren hat vor einiger Zeit die Oberssche Bahnbestimmungsmethode in eine für das Maschinenrechnen geeignete Form gebracht. Zur Abkürzung der Rechnung dient die in dem vorliegenden Artikel mitgeteilte numerische Tafel. *Klose (Berlin).*

**Möller, Jens P.: Calculation of ephemerides in nearly parabolic orbits.** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 93, 777—788 (1933).

Die Keplersche Gleichung wird in einer auf Andoyer zurückgehenden Form benützt. Anschließend an die parabolische Bewegung wird die Zeit seit dem Periheldurchgang des Kometen durch eine Potenzentwicklung dargestellt mit  $\sigma = \sin \frac{1}{2} E / \sqrt{\varepsilon}$  und  $\varepsilon$  als Entwicklungsparametern ( $E$  exzentrische Anomalie,  $e = 1 - 2\varepsilon$  numerische Exzentrizität). Die Berechnung von  $\sigma$  wird durch eine beigegebene Tafel erleichtert. *A. Klose (Berlin).*

**Tiercy, Georges: Réflexions sur le problème des comètes.** Arch. Sci. Physiques etc. 15, 385—408 (1933).

Das bereits in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 5, 87) behandelte Problem der Herkunft der Kometen wird erneut, unter etwas allgemeineren Bedingungen, angegriffen. Im „Ursprungsgebiet“ der Kometen, das weit außerhalb des Planetensystems gedacht ist, soll die Geschwindigkeit um einen mittleren Wert von 0,2 km/sec streuen. Es werden zwei Hypothesen verfolgt, eine symmetrische und eine unsymmetrische Geschwindigkeitsverteilung im Ursprungsgebiet. In beiden Fällen ergibt sich



in Sonnennähe eine ausgesprochene Bevorzugung der elliptischen gegenüber den hyperbolischen Bahnen. Exzentrizitäten größer als 1,01 sind ganz unwahrscheinlich.

*A. Klose (Berlin).*

**Moisseiev, N.:** Über einige Grundfragen der Theorie des Ursprungs der Kometen, Meteore und des kosmischen Staubes. (Kosmogonische Studien. IV.) Publ. Sternberg State Astron. Inst. 5, 1—86 (1933).

In Fortsetzung einiger 1930 erschienener Untersuchungen über das Kometenproblem werden in einem 4. Artikel die Verteilungsformeln für die Bahnelemente der Kometen aufgestellt. Der Ursprung des Systems der Kometen und Meteore wird im Gebiet des Sonnensystems, aber außerhalb der Wirkungssphäre der Sonne angenommen (d. h. die mittlere Ursprungsgeschwindigkeit des Kometenstroms wird gleich der Sonnengeschwindigkeit angesetzt, aber der Ursprungsort soll außerhalb der Sphäre liegen, innerhalb der die Attraktion durch die Sonne wirksam ist). Für den Fall, daß ein Teil dieses Kometenstromes in die terrestrische Sichtbarkeitssphäre gelangt, ergibt sich eine bestimmte Verteilung der Bahnelemente der Kometen, je nach den Grundannahmen, die über den Ursprungszustand gemacht wurden. Die Verteilungsformeln werden für verschiedene Hypothesen durchgerechnet, die Anwendung der Formeln durch numerische Tafeln und Diagramme erleichtert.

*A. Klose (Berlin).*

**Moisseiev, N.:** Über einige Grundfragen der Theorie des Ursprungs der Kometen, Meteore und des kosmischen Staubes. (Kosmogonische Studien.) V. Über die Verteilung der Dichten innerhalb einer sich bewegenden Wirkungssphäre. Russ. astron. J. 9, 30—52 (1932).

In einem 5. Artikel (vgl. das vorsteh. Referat) werden die Verteilungsformeln für die Kometen innerhalb der Wirkungssphäre der Sonne untersucht, und zwar für den Fall, daß sich die Sonne relativ zum Kometensystem bewegt. Vereinfachend wird vorausgesetzt, daß vor Eintritt in die Wirkungssphäre die Geschwindigkeiten der Kometen relativ zum Strom gleich Null sind.

*A. Klose (Berlin).*

**Adams, W. S.:** Astrophysics and the ionization theory. Publ. Astron. Soc. Pacific 45, 215—226 (1933).

**Greaves, W. M. H.:** The temperatures of the stars. Scientia 54, 316—322 (1933).

**Ambarzumian, V., und N. Kosirev:** Über die Massen der von den neuen Sternen ausgestoßenen Gashüllen. Z. Astrophys. 7, 320—325 (1933).

Unter der Annahme, daß bei dem Aufleuchten einer Nova vom Stern ein oder mehrere Gashüllen ausgestoßen werden, wird versucht, die Größenordnung der Masse einer solchen Hülle abzuschätzen. Es wird gezeigt, daß die Leuchtkraft zunimmt, solange die optische Dicke  $\tau_0$  der sich ausdehnenden Hülle größer als 1 ist. Wird  $\tau_0$  kleiner als 1, so nimmt die Leuchtkraft ab. Die Masse der Hülle läßt sich genähert angeben, wenn der äußere Radius der Hülle bekannt ist. Dieser läßt sich aus der Maximalhelligkeit der Nova bestimmen, wenn angenommen wird, daß diese für alle Novae konstant ist. Die Masse der Hülle ergibt sich hieraus von der Größenordnung eines Millionstel der Sonnenmasse. Eine zweite Methode, die die Tatsache benützt, daß die maximale Intensität des Emissionsbandes von  $\text{He}^+$   $\lambda 4686$  erreicht wird, wenn  $\tau_0 \approx 1$  ist, ergibt etwas größere Massenwerte. Als wahrscheinlichster Wert aus beiden Methoden ist  $1/100000$  der Sonnenmasse anzunehmen.

*Klauder (Jena).*

**Gunn, Ross:** Possible stellar origin of high-speed ions. Terrest. Magnet. Atmosph. Electr. 38, 247—256 (1933).

On the assumption that stellar atmospheres are permeated by intense electric and magnetic fields, the author shows that ions and electrons would be unable to escape except from regions where the magnetic field was radial, as in sunspots. In such areas ions and electrons would experience an acceleration and could escape. The excitation of the terrestrial aurora could thus be accounted for. The author also attempts to explain cosmic radiation as due to similar emission from early-type stars. No logical

basis is established for the maintenance of electrostatic fields of so high order a magnitude. Their existence is inferred from the eastward drift of matter at high levels in the solar atmosphere.

*D. H. Menzel* (Cambridge).

**Woolley, R. v. d. R.: The calcium ionisation temperature of the sun.** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 93, 691—710 (1933).

The aim of the work is to derive from the observed intensities of Ca and Ca<sup>+</sup> lines in a stellar atmosphere the relative numbers of neutral and ionised atoms. Then a temperature can be deduced by application of a suitable ionisation formula. The steps in the process are: An expression for the absorption coefficient for continuous radiation in terms of the electron pressure and the temperature is obtained from Chandrasekhar's theory and Russell's observations on the composition of the solar atmosphere. Then the electron pressure  $P$  can be calculated for any optical depth  $\tau$ , given the value of surface gravity  $g$ . The ratio of the number of neutral ( $n_0$ ) to ionised ( $n_1$ ) calcium atoms at given optical depth  $\tau = 0.3$  is calculated from accepted theory of line contours and the observed equivalent widths of the spectral lines, in terms of transition constants for these lines of the atoms. The state of ionisation at optical depth  $\tau$  is calculated by the usual ionisation theory, with the incorporation of Pannekoek's adjustment for the anisotropy of the radiation flow. This is expressed in terms of the effective temperature of the star through the usual relation of temperature to optical depth. Comparison of the value of  $n_0/n_1$  with this degree of ionisation gives a value for this temperature. Details of the calculation and observation for the case of the sun are given, and the value of the effective temperature of integrated sunlight so derived is  $6310^\circ \pm 50^\circ$ . The theory of the widths of lines is then used to derive from the observed equivalent widths of other lines of Ca "astrophysical" values of their oscillator strengths. The method of the paper is finally applied to Hogg's measurements of the widths of calcium lines in late type stars. As in the case of the sun the effective temperatures come out higher than some previous determinations.

*W. H. McCrea* (London).

**Russell, Henry Norris: Opacity formulae and stellar line intensities.** Astrophys. J. 78, 239—297 (1933).

Die Linienintensitäten in Sternspektren hängen ab von der Anzahl der wirksamen Atome „über der Photosphäre“ und daher mittelbar von der Opazität der Sternmaterie. Milne und Chandrasekhar, die zuletzt das ganze Problem der Linienintensitäten diskutiert hatten, definierten die Lage der Photosphäre durch die allgemeine Opazität, den über alle Wellenlängen genommenen Mittelwert der Absorption des Strahlungsflusses. Im Gegensatz zu ihnen hält Russell es für notwendig, bei der Untersuchung von Linienintensitäten die optischen Tiefen auf den monochromatischen Absorptionskoeffizienten des betrachteten, begrenzten Spektralgebiets zu beziehen. Allgemeine Opazität ( $\propto T^{-9/2}$ ) und monochromatische Absorption ( $\propto T^{-3/2}$ ) befolgen stark verschiedene Temperatugesetze. Daher führt Russells Theorie zu erheblichen Abweichungen von den Resultaten seiner Vorgänger, gleichzeitig aber zur Behebung wesentlicher Schwierigkeiten der älteren Theorie. — Die Berechnung von Anzahlen der neutralen und ionisierten Atome und der optischen Tiefen in einer Atmosphäre, die zwei teilweise ionisierte Elemente und weitere neutrale enthält, wird durch Einführung von Hilfsfunktionen (Tabellen!) erleichtert. Der Einfluß der Gravitation, der Temperatur und der relativen Häufigkeit werden in einem vereinfachten Fall (ein teilweise ionisiertes Element in inaktiver Atmosphäre) behandelt. Für das Auftreten eines Maximums der Linienintensität eines bestimmten Elements ist die Anwesenheit eines anderen leichter ionisierbaren Elements Bedingung; die Lage des Maximums hängt von der relativen Häufigkeit der beiden ab. — Um die Folgerungen aus der Theorie mit dem Beobachtungsmaterial vergleichen zu können, müssen Annahmen über die relative Häufigkeit der Elemente eingeführt werden, sowie die Oszillatorenstärken der einzelnen Linien und die Änderung der Schwere längs des Riesen-



und Zwergastes berücksichtigt werden. Die so berechneten absoluten Intensitäten und Temperaturmaxima stimmen befriedigend mit der Erfahrung überein, abgesehen von mäßigen Abweichungen bei H und  $Mg^+$ . Für normale Sterne muß H 1000 bis 2000mal häufiger sein als alle Metalle zusammen. Die charakteristischen Eigenschaften der c-Sterne werden versuchsweise durch geringeren Wasserstoffgehalt gedeutet. Die Theorie versagt gegenüber den hohen Intensitäten der Balmer- und Funkenlinien in den roten Riesen; wahrscheinlich genügt hier die Annahme von isothermen Atmosphären nicht mehr.

R. Wildt (Göttingen).

**Gratton, Livio:** *Ricerche sulla funzione di luminosità.* Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. 2, 303–316 (1933).

**Rosseland, Svein:** *Remarks on a paper by Gião and Wehlrlé: „Sur les rotations des astres fluides“.* Beitr. Physik frei. Atmosph. 21, 49–50 (1933).

Gião und Wehlrlé tacitly assume that no energy is dissipated by viscosity when the divergence of the viscous stress tensor  $P$  is zero but the rate at which heat energy is generated per unit volume is really  $\Phi \equiv \text{Div}(VP) - V \text{Div} P$  where  $V$  is the linear velocity of rotation. Though the second term vanishes in a state of stationary motion the first term does not, the total amount of energy dissipated by viscous action is thus

$$\int_{\text{vol}} \Phi d\tau = \int_{\text{vol}} \text{Div}(VP) d\tau = \int_{\text{Surface}} (VP) d\sigma.$$

A non-uniform, stationary rotation of a star built out of viscous material must thus be maintained by tangential stresses at the surface and these cannot exist when a star is isolated. By expressing  $\Phi$  in cylindrical co-ordinates it is found that it is zero only when the angular velocity is constant.

H. Bateman (Pasadena).

## Quantentheorie.

**Pauli, W.:** *Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten.* II.: *Die Diracschen Gleichungen für die Materiewellen.* Ann. Physik, V. F. 18, 337 bis 372 (1933).

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden die Matrixgleichungen

$$\frac{1}{2}(\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu) = g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5)$$

( $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  Fundamentaltensor), die bekanntlich durch 5 vierreihige Matrizen  $\alpha_\mu$  gelöst werden können. Mit Hilfe einer „hermitisierenden“ Matrix  $A$  wird aus dem projektiven Spinor  $\Psi$  ein reeller Fünfervektor  $a_\mu = \bar{\Psi} A \alpha_\mu \Psi$  gebildet. Bei der Betrachtung der Transformationen wird betont, daß zu jeder „Drehung“ ( $g_{\mu\nu}$  invariant) eine solche  $S$ -Transformation ( $\Psi' = S\Psi$ ) existiert, daß bei simultaner Durchführung der Drehung und der  $S$ -Transformation die  $\alpha^\mu$  fest bleiben. Ferner wird die kovariante Differentiation der Spinoren studiert und die im vierdimensionalen (inhomogenen) Fall von Fock und Schrödinger angegebenen Formeln

$$\frac{\partial \alpha^\mu}{\partial X^e} + \Gamma_{\sigma e}^\mu \alpha^\sigma + A_e \alpha^\mu - \alpha^\mu A_e = 0; \quad \nabla_e \equiv \frac{\partial}{\partial X^e} + A_e$$

(kovariante Ableitung der Matrix  $\alpha^\mu$ , bzw. kovariante Differentiation eines Spinors) auf den fünfdimensionalen (homogenen) Fall übertragen. Der Ausdruck  $F_e = \text{Spur} A_e$  wird aber abweichend von Fock und Schrödinger nicht dem Vektorpotential, sondern dem Gradienten eines Skalars  $F$  gleichgesetzt. Dafür wird aber die Wellengleichung in der Form  $\alpha^\mu (\nabla_\mu \Psi + k X_\mu \Psi) = 0$ , d. h. mit expliziter Einführung des Vektorpotentials, angesetzt. Der projektive Spinor  $\Psi$  wird durch die Diracsche Wellenfunktion  $\psi$  und einen reellen homogenen Skalar  $F$  vom Grade 1 ausgedrückt:  $\Psi = \psi F^{\frac{1}{2}}$ . Die Konstanten  $k$  und  $l$  werden aus dem Vergleich mit der Diracschen Gleichung bestimmt. Diese Gleichung enthält auch im Fall der speziellen Relativitätstheorie Zusatzglieder, die proportional  $\sqrt{\kappa}$  ( $\kappa$  Gravitationskonstante) sind. Es wird die Lagrange-

funktion der Materie gebildet und zur Lagrangefunktion des Vakuums hinzuaddiert. Die Feldgleichungen können dann aus dem Variationsprinzip abgeleitet werden. Die Variation des Wirkungsintegrals führt ferner zu einem fünfdimensionalen symmetrischen Tensor (Projektor)  $T_{\mu\nu}$ , welcher den Energieimpulstensor und den Stromvektor einheitlich zusammenfaßt. Die gewonnenen Gleichungen müssen einer nochmaligen Quantisierung unterworfen werden (was hier nicht durchgeführt wird). Zum Schluß wird der mehr provisorische Charakter dieses 2. Teiles der Arbeit gegenüber dem 1. Teil (dies. Zbl. 7, 425) betont. *V. Fock* (Leningrad).

**Wentzel, Gregor:** Über die Eigenkräfte der Elementarteilchen. I. Z. Physik 86, 479—494 (1933).

Auf Grund der Quantenelektrodynamik von Dirac, Fock und Podolsky [Physik. Z. Sow. Un. 2, 468 (1932); dies. Zbl. 6, 237] wird das Maxwellsche Feld eines Elementarteilchens über dessen vierdimensionale Raum-Zeit-Umgebung fortgesetzt. Im Innern des vom Teilchen ausgehenden Lichtkegels verhält sich das Feld wesentlich anders als außen. Speziell für den klassischen Grenzfall ( $\hbar = 0$ ) wird gezeigt, daß die Feldstärken am Mittelpunkt des Teilchens endliche Grenzwerte annehmen, falls man den Aufpunkt aus einer zeitartigen Richtung auf das Teilchen zugehen läßt. Es ist daher möglich, die Eigenkraft eines ausdehnungslosen Teilchens so zu definieren, daß dieses keinen elektromagnetischen Trägheitswiderstand, sondern nur eine Strahlungsdämpfung erfährt. Bei der Berechnung der Strahlungsdämpfung auf Grund der relativistischen Wellenmechanik stellen sich Schwierigkeiten ein, welche in der „Zitterbewegung“ des Diracschen Elektrons ihren Ursprung haben. *V. Fock*.

**Szezenjowski, S.:** Zur Frage des Übergangs der Elektronen in das Gebiet der negativen Energiewerte. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 1/3, 21—39 (1933).

Es wird eine der bekannten quasimechanischen Näherungslösung der Schrödingerschen Wellengleichung entsprechende Lösung der eindimensionalen Diracschen Wellengleichung gegeben und auf das Problem des Durchgangs von Elektronen in Gebiete negativer kinetischer Energie angewandt. *O. Klein* (Stockholm).

**Sevin, Émile:** Sur la nature des ondes et des corpuscules. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 980—982 (1933).

Note on some deductions from a previous conclusion of the author [C. R. Acad. Sci., Paris 188, 986 (1929)] that in a field of electromagnetic radiation of wave length  $\lambda$ , the momentum  $m_0 v / \sqrt{1 - \beta^2}$  of a free electron can attain one of the values  $n \hbar / \lambda$ , where  $n$  is integral, and that conversely a stream of electrons with velocity  $v$  can give rise to radiation of wave length  $\lambda = \hbar \sqrt{1 - \beta^2} / n m_0 v$ . *W. H. McCrea* (London).

**Buhl, A.:** Propagations très générales indifféremment ondulatoires ou corpusculaires. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 822—824 (1933).

Eine vom selben Verf. früher [Mém. Sci. physiques 22, 52 (1933); dies. Zbl. 6, 347] entwickelte Transformation eines Volumintegrals in ein Flächenintegral wird in formale Beziehung gebracht zu der Schrödingerschen Wellengleichung. *O. Klein*.

**Majorana, Ettore:** Sulla teoria dei nuclei. Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. 1, 559—565 (1933).

Identisch mit der in dies. Zbl. 6, 331 referierten Arbeit. *Guth* (Wien).

**Elssasser, W. M.:** Sur le principe de Pauli dans les noyaux. J. Physique Radium, VII. s. 4, 549—556 (1933).

Systematik der leichteren Kerne unter der Voraussetzung, daß nur Protonen und Neutronen vorhanden seien, denen dann unabhängig voneinander ein Schalen-aufbau zugeschrieben wird (also bewußter Verzicht auf die Zusammenfassung zu  $\alpha$ -Teilchen, mit der Begründung, daß deren Massendefekt nicht groß genug ist, um ihre Behandlung als selbständige Teilchen zu rechtfertigen). Kerne, bei denen man abgeschlossene Schalen erwarten kann, scheinen auch besonders große Massendefekte zu haben.

*C. F. v. Weizsäcker* (Kopenhagen).



**Sterne, T. E.:** The equilibrium theory of the abundance of the elements: A statistical investigation of assemblies in equilibrium in which transmutations occur. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **93**, 736—767 (1933).

The author recalls first that there is reliable experimental evidence for the transmutations of atomic nuclei, but no such evidence for the annihilation of nuclei. It is therefore reasonable to formulate and solve the problem of finding the abundances of the nuclei of the different elements in an assembly of radiation, electrons, protons, neutrons and atomic nuclei, which are undergoing all possible transmutations, but not annihilation, in statistical equilibrium at temperature  $T$ . This he does under two alternative hypotheses: (a) The fundamental particles are electrons and protons, the total number of each remaining constant, so that a nucleus of mass number  $M_s$  and atomic number  $N_s$  contains  $M_s - N_s$  electrons and  $M_s$  protons. (b) The fundamental particles are electrons, protons, and neutrons, the total number of each remaining constant, so that the nucleus ( $M_s, N_s$ ) contains  $M_s - N_s$  neutrons and  $N_s$  protons. The standard methods of statistical mechanics, as given by R. H. Fowler, are used. The procedure is, given the density and temperature, to assume a mean molecular weight, from which the number of free electrons, i. e. those not used, in case (a), in building up nuclei, can be calculated. Next, from a knowledge of the packing fractions, levels of nuclear excitation, and weights, the numbers of all possible nuclear types can in principle be calculated corresponding to different values of a certain thermodynamic potential. The required numbers are those which reproduce the given density. If they do not reproduce the assumed mean molecular weight, they can be used to give a corrected value for which the process can be repeated. The formal results are given for cases (a), (b) for classical and relativistic, degenerate and non-degenerate, assemblies. Actual numerical results cannot be given on account of incomplete knowledge of packing fractions etc., but a sample calculation is given for a hypothetical assembly in which only a few types of nuclei are allowed. The general theory is sufficient to indicate a reason for the greater abundance of nuclei of even atomic number, which are taken as obeying Einstein-Bose statistics, the others obeying Fermi-Dirac statistics. It is further pointed out how the theory may be expected to apply to the interiors of stars, where local thermodynamic equilibrium holds to a high approximation. *McCrea*.

**Sterne, T. E.:** A note on the liberation of energy by transmutations of nuclei in the stars. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **93**, 767—769 (1933).

In the type of assembly discussed in the preceding paper energy can be liberated by cooling at constant volume. It is shown how to calculate the rate of this liberation in the case (a).

*W. H. McCrea* (London).

**Sterne, T. E.:** The equilibrium of transmutations in stars in which transmutations are an important source of energy. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **93**, 770—777 (1933).

The transmutation of nuclei may provide a source of stellar energy by the capture of nuclei of large packing fraction into other nuclei, and the extreme cases of such energy generation are (I) the capture takes place very slowly in the virtual absence of the reverse process, and consequently the abundances of the nuclei do not correspond to statistical equilibrium, or (II) the capture takes place at a high rate and so is nearly balanced by the reverse process, and consequently the assembly is very nearly in statistical equilibrium. The rates of capture are given by the theory of Gamov, and the author gives numerical results in the typical case of the capture of protons by lithium. It follows from these calculations that in the extreme type (I) the rate of generation of energy will vary so rapidly with temperature, when this is such as to give the required rate, namely about  $10^7$  deg., that the star would be over-stable. This difficulty of over-stability is removed if one supposes the actual state of affairs to be given by (II). For the observed abundance of the elements would then correspond to about  $10^9$  deg. or more, and at this temperature the rate of energy generation varies with a low power of the temperature.

*W. H. McCrea* (London).

**Henneberg, Walter:** Anregung von Atomen in inneren Schalen durch langsame Protonen und  $\alpha$ -Teilchen. *Z. Physik* 86, 592—604 (1933).

Es wird gezeigt, daß die Ionisierungswahrscheinlichkeit der K-Schale durch langsame Protonen oder  $\alpha$ -Teilchen nach dem Bornschen Verfahren berechnet werden kann, obwohl die Störung der Wellenfunktion des stoßenden Teilchens durch das streuende Atom keineswegs als klein betrachtet werden darf. Bei der Berechnung des entsprechenden Matrixelements heben sich nämlich die Abweichungen von den ungestörten Wellenfunktionen in Anfangs- und Endzustand einander nahezu auf. Es wird dann (teilweise unter Benützung von Ergebnissen, die dem Verf. von H. Bethe zur Verfügung gestellt wurden) die Ionisierungswahrscheinlichkeit der K-Schale berechnet. Für kleine Energien ergibt sich ein Anstieg proportional  $E^4$ . Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist befriedigend.

*H. Casimir (Leiden).*

**Margenau, H.:** Zur Theorie der Verbreiterung von Spektrallinien. *Z. Physik* 86, 523—529 (1933).

The width of an emission line due to interaction of the emitting atom with other atoms (pressure-widening) can be calculated on two hypotheses. Either the atom can be thought of as emitting continuously, with a frequency varying with the time due to the varying perturbations from other atoms, and the resulting line contour is obtained by a Fourier analysis of the frequency. Or, secondly, the atom can be thought of as emitting light quanta, each with a characteristic frequency depending on the perturbation at the instant of emission, and the resulting contour is given by a statistical analysis of the probabilities of emission of different frequencies. The author demonstrates that, under very general conditions, the two methods agree in the values for the first and second moments of the intensity curves of the spectral line. These moments give respectively the measure of the shift and distortion of the line. *W. H. McCrea.*

**Segrè, E., e G. C. Wick:** Serie degli alcalini in un campo elettrico. *Nuovo Cimento*, N. s. 10, 211—220 (1933).

In den Serien  $4S - nP$ ,  $4S - nS$ ,  $4S - nD$  des Kaliums treten Intensitätsanomalien auf, wenn man ein starkes elektrisches Feld wirken läßt [H. Kuhn, *Z. Physik*, 61, 805 (1930); C. I. Bakker, *Proc. Amsterdam* 36, 589 (1933)]. Man findet erstens, daß die Serien bei einer bestimmten Gliednummer aufhören — das hat schon Lanczos mit der Ionisation des Atoms durch das Feld erklärt [*Z. Physik* 68, 204 (1931); dies. Zbl. 1, 178] —, und zweitens, daß die ohne Feld allein „erlaubte“ Serie  $4S - nP$  schon vorher merklich an Intensität verliert, während die ohne Feld „verbotenen“ Serien sehr stark herauskommen. Den zweiten Erscheinungskomplex kann man mit der Ionisation nicht erklären. Die Verff. zeigen, daß er auf der gegenseitigen Störung der Serien beruht. Es gilt eine Summenregel, wonach die Summe der Intensitäten der erlaubten und der verbotenen Linien, die Übergängen nach einem (im wesentlichen) ungestörten Term (hier  $4S$ ) entsprechen, von der Feldstärke unabhängig ist. Was die verbotenen Linien an Intensität gewinnen, verlieren die erlaubten Linien. Die Intensitäten werden nach einem korrespondenzmäßig vereinfachten Wentzel-Brillouin-Verfahren berechnet und stimmen mit den experimentellen befriedigend überein.

*Bechert (Gießen).*

**Neugebauer, Th.:** Vergleich der sich auf die elektrische Doppelbrechung beziehenden quantentheoretischen Formeln mit der Erfahrung. *Z. Physik* 86, 392—410 (1933).

Im Anschluß an seine früheren Arbeiten [*Z. Physik* 73, 386 (1931); 82, 660 (1933); dies. Zbl. 3, 183 u. 7, 41] schätzt der Verf. die Größenordnung der einzelnen Glieder seiner Kerreffektformel ab. Dabei findet er, daß die Glieder, welche der Langevin-Born-Gansschen Theorie (Orientierung im Felde) entsprechen, den wesentlichen Bestandteil des Kerreffekts bilden, während die der Voigtschen Theorie (Änderung der Eigenfrequenzen im Felde) entsprechenden Glieder gegen die ersteren klein sind. Nur bei symmetrischen Molekülen, wo die der Orientierungstheorie entsprechenden Glieder verschwinden, sind die Voigtschen Glieder von Bedeutung und erklären dort den ge-



messenen Kerreffekt. Abgesehen von den Voigtschen Gliedern kann ein nichtverschwindender Kerreffekt bei symmetrischen Molekülen auch dann auftreten, wenn die Oszillationsniveaus sehr nahe beieinander liegen. Hierbei wird noch darauf hingewiesen, daß man dann die bekannte Beziehung zwischen Kerrkonstante und Depolarisationsgrad nicht mehr benutzen kann. — In Kristallen mit Koordinationsgitter wird der Kerreffekt nur durch die Voigtschen Glieder verursacht. Man kann daraufhin aus Kerreffektmessungen das innere Feld im Kristall befriedigend abschätzen. Bei Molekül-gittern kann der Kerreffekt auch als Orientierungseffekt erklärt werden. — Schließlich verallgemeinert der Verf. seine Formeln für zweiatomige Moleküle auch auf mehratomige.

*B. Mrowka (Königsberg/Pr.).*

**Mrowka, Bernhard: Weitere Beiträge zur theoretischen Optik des Wasserstoffmoleküls.** Z. Physik 84, 448—465 (1933).

Als Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. [Z. Physik 76, 300 (1932); dies. Zbl. 4, 380] wird der Einfluß der Nullpunktsbewegung der Kerne auf die mittlere Polarisierbarkeit und der Depolarisationsgrad des Wasserstoffmoleküls  $H_2$  berechnet, ferner die Intensitäten des ramantiven und Depolarisationsgrad bei Berücksichtigung des Ramaneffektes. Es zeigt sich, daß Ramaneffekt und Nullpunktsbewegung den Depolarisationsgrad 16% größer machten als bei ruhenden Kernen. Schließlich werden die optischen Polarisierbarkeiten und der Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge angegeben.

*Waller (Upsala).*

**Eyring, Henry, Arthur A. Frost and John Turkevich: Molecular symmetry and the reduction of the secular equation.** J. chem. Phys. 1, 777—783 (1933).

Regeln über die Matrixkomponenten für Eigenfunktionen von Molekeln, die (im Slaterschen Sinne) Valenzbindungen entsprechen, werden abgeleitet. Durch Ausnützung der Symmetrie der Molekeln wird die Rechnung vereinfacht. Es folgen Anwendungen auf  $N_2$ ,  $NH_3$ ,  $CH_4$ .

*F. Hund (Leipzig).*

**Markov, M.: On the quantum mechanical stability of a benzol molecule.** J. chem. Phys. 1, 784—788 (1933).

Nach der Heitler-London-Rumerschen Theorie der Spinvalenz wird versucht, die Frage nach der Stabilität des Benzolmoleküls zu behandeln. Die Rechnung geht davon aus, das Molekül als aus 6 stickstoffähnlichen CH-Gruppen aufgebaut anzusehen. Auf die Gerichtetheit der Valenzen wird keine Rücksicht genommen. Unter den gemachten Voraussetzungen ergibt sich, daß das Molekül zwar als solches stabil sei, aber (im Widerspruch mit der Erfahrung) weniger stabil als 3 getrennte Acetylenmoleküle. Die Behandlung des Problems entspricht also nicht den wirklichen Verhältnissen.

*E. Hückel (Stuttgart).*

**Széll, Koloman: Über die Statistik der mehratomigen Gase.** Z. Physik 86, 810 bis 817 (1933).

Statistik der Translations- und Rotationszustände von mehratomigen Gasen, deren (starr gedachte) Molekeln zwei oder drei gleiche Trägheitsmomente haben.

*F. Hund (Leipzig).*

**Laue, M. v.: Materie und Raumerfüllung.** Scientia 54, 402—412 (1933).

**Jackson, J. M., and A. Howarth: Exchange of energy between inert gas atoms and a solid surface.** Proc. Roy. Soc. London A 142, 447—456 (1933).

Jackson und Mott (dies. Zbl. 5, 236) berechneten den Akkomodationskoeffizienten  $\alpha$  unter der Annahme eines eindimensionalen exponentiellen Abstoßungspotentials:  $Ce^{-\alpha v}$  zwischen Gas und festem Körper, welch letzterer als Oszillatoren-gesamtheit derselben Frequenz idealisiert wurde. — Hier wird der feste Körper als kubisches Gitter angesetzt und  $\alpha$  durch Mittelung über die Normalschwingungen erhalten, da der Energieaustausch zwischen Gasatom und einer bestimmten Normalschwingung unabhängig von der Anwesenheit der anderen Normalschwingungen vor sich geht. Es ergibt sich, daß  $\alpha$  mit wachsender charakteristischer Temperatur (des festen Körpers) abnimmt, in qualitativem Einklang mit Versuchen von Estermann

und Stern über die Beugung von H- und He-Molekularstrahlen an LiF und NaCl. — Vergleich mit den Experimenten von Roberts [zit. in dies. Zbl. 5, 236 u. 3, 424 (Jackson)] über die Temperaturabhängigkeit von  $\alpha$  (He-Wo) ergibt:  $a = 4,10^8 \text{ cm}^{-1}$ , in guter Übereinstimmung mit den von Slater und Kirkwood (dies. Zbl. 1, 248) für He-He und von Born und Mayer (dies. Zbl. 4, 94) für Alkalihalide angegebenen Werten:  $a = 4,6$  und  $3,10^8 \text{ cm}^{-1}$ . — Jackson-Mott (l. c.) erhielten:  $a = 9 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}$ .  
Guth (Wien).

Herzfeld, K. F., and R. H. Lee: The theory of forced double refraction. *Physic. Rev.*, II. s. 44, 625—631 (1933).

Frühere Rechnungen über die erzwungene Doppelbrechung, die in kubischen Kristallen auftritt, wenn man sie einer Spannung unterwirft, hatten nicht zu Übereinstimmung mit dem Experiment geführt. Sie sollen verbessert werden, indem man nicht nur die erzeugte Anisotropie in der Lorentz-Lorenz-Kraft in Betracht zieht, sondern auch die Tatsache, daß das Feld, in dem die dispergierenden Teilchen schwingen, anisotrop wird. Unter der Annahme harmonischer Schwingungen kommt es zu Formeln, die noch immer nicht mit der Erfahrung stimmen; mit einem allgemeineren Ansatz, der überdies quantenmechanisch durchgerechnet wird, kommt man zu Formeln, die zu viele Parameter enthalten, um einen Vergleich mit der Erfahrung zu erlauben.

R. Peierls (Manchester).

## Kristallographie.

Oseen, C. W.: Beiträge zur Theorie der anisotropen Flüssigkeiten. XVIII: Über die Strukturen der cholesterin-nematischen Substanzen. *Ark. Mat. Astron. Fys.* 23 A, Nr 24, 1—5 (1933).

Mit dem gleichen Energieansatz wie in der vorigen Arbeit dieser Reihe (vgl. dies. Zbl. 7, 96) soll außer der dort besprochenen „verdrillten Textur“ der cholesterin-nematischen Substanzen auch ihre sog. „smektische Textur“ erklärt werden. Es wird gezeigt, daß die verdrillte Textur nur dann ein Minimum der Energie liefert, wenn die Koeffizienten des Energieausdrucks gewisse Bedingungen erfüllen. Andernfalls hat man stabile Texturen, die mit den verdrillten nur das Gemeinsame haben, daß auch in ihnen die Moleküle zu geraden Ketten angeordnet sind. Das nahezu „smektische“ Verhalten dieser Texturen, das sich besonders in dem Auftreten „konischer Störungen“ äußert, läßt sich verstehen durch die Analogie der geraden Molekülketten mit den Schichtnormalen der eigentlich smektischen Substanzen: In beiden Fällen kommen für die Schichten bzw. Normalfächen der Ketten nur solche Flächen in Betracht, deren Brennpunktflächen in Kurven oder Punkte ausgeartet sind, d. h. die Dupin'schen Zykliken.

C. Hermann (Stuttgart).

Oseen, C. W.: The theory of liquid crystals. *Trans. Faraday Soc.* 29, 883—899 (1933).

Die Arbeit ist eine Zusammenstellung verschiedener unabhängiger Untersuchungen aus der Theorie der flüssigen Kristalle: 1. Über die molekularen Kräfte in kristallinen Flüssigkeiten. Zur Erklärung aller Eigenschaften der flüssigen Kristalle hat bisher die Annahme ausgereicht, daß die Moleküle dieser Substanzen eine ausgezeichnete Achse haben und um diese rotationsymmetrisch seien. Unter dieser Annahme lassen sich für die meisten flüssig-kristallinen Zustände die Existenzbedingungen auf gewöhnliche, z. B. elektrostatische Kräfte zurückführen. Schwierigkeiten bereiten nur die schraubensymmetrischen Texturen der cholesterinartigen Substanzen. Mit statischen Kräften läßt sich bei rotationsymmetrischen Gebilden kein Energieunterschied zwischen einer rechts- und einer linksgeschraubten Textur erklären. Dagegen ist, in Analogie zur Theorie der optischen Drehung, eine Erklärung zu erhoffen, wenn man die intermolekularen Wirkungen zurückführt auf rotierende Elektronen und die Retardierung der zugestrahlten Energien berücksichtigt. — 2. Über die Singularitäten in nematischen Strukturen. Ist  $L$  der Einheitsvektor in Richtung der ausgezeichneten Achse der Moleküle,  $\rho$  die Dichte, so schreibt Verf. die freie Energie der flüssigen Kristalle:  $\rho \{ K_1 L \text{ rot } L + K_{11} (L \text{ rot } L)^2 + K_{22} (\text{div } L)^2 + K_{33} (L \text{ grad}) L^2 + 2 K_{12} \text{ div } L \cdot (L \text{ rot } L) \}$ . Für nematische Substanzen ist  $K_{12} = 0$ ;  $K_{22} = K_{33}$ . Die Bedingung, daß die Energie ein Minimum werden soll, führt auf alle beobachteten Texturen, insbesondere auf die beobachteten



singulären Stellen; doch hat das Variationsproblem noch andere Lösungen, die nicht beobachtet werden. Den Grund für ihr Fehlen findet man erst, wenn man nicht nur  $L$ , sondern auch  $\varrho$  variiert; d. h. von diesen Zuständen gelangt man nur über Zwischenzustände mit inhomogener Dichtevertellung zu Zuständen tieferer Energie. 3. Die irisierenden Texturen der cholesterinartigen Substanzen. Bei diesen ist die ausgezeichnete Richtung  $L$  innerhalb gewisser Ebenen konstant, dreht sich aber beim Fortschreiten zu den parallelen Ebenen mit konstanter Schraubungsgeschwindigkeit. Die optischen Eigenschaften einer solchen Substanz werden berechnet unter der Annahme einer Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_3$  in der Richtung  $L$ ,  $\varepsilon_1$  senkrecht dazu. Das Ergebnis ist, daß Lichtwellen mit Frequenzen  $\omega$  zwischen  $c\alpha/\sqrt{\varepsilon_1}$  und  $c\alpha/\sqrt{\varepsilon_3}$  ( $\alpha$  = Ganghöhe der Schraubenstruktur) in der Struktur in zwei Wellen zerlegt werden, von denen die eine total reflektiert wird, die andere durchgeht. Beide sind elliptisch polarisiert. Schwingungsform und Orientierung der Schwingungsellipse des durchgegangenen Strahls sind unabhängig von dem Polarisationszustand des einfallenden Lichtes. Außerhalb dieses Frequenzbereichs durchsetzen beide Wellen mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten die Struktur. Es ergibt sich beim Austritt im allgemeinen eine elliptisch polarisierte Welle, deren Hauptachsenrichtungen aber nicht in einfacher linearer Beziehung stehen zu der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes oder zur Dicke der durchsetzten Materieschicht. Von einer optischen Drehung im üblichen Sinn kann keine Rede sein. 4. Die Bewegungen anisotroper Flüssigkeiten. Dieser Teil ist im wesentlichen ein Referat über A. Anzelius: „Die Bewegung anisotroper Flüssigkeiten“, Jb. d. Univ. Uppsala 1931, mit anschließenden verbessernden Rechnungen, die aber an der Erfahrung nur qualitativ geprüft werden können. Insbesondere kann die gelegentliche heftige Rotationsbewegung der Tropfen erklärt werden als ein Spezialfall der Bewegungsgleichungen, für den die Viskosität verschwindet. 5. Die Form flüssiger Kristalle. Die obengenannte Energieformel wird zur Berechnung von Oberflächenenergien benutzt. Es zeigt sich, daß die von Lehmann beschriebene Tropfenform mancher nematischen Substanzen, Kreiszylinder, die beiderseits eben begrenzt sind, keinen Zustand kleinster Oberflächenenergie darstellen, daß ein solcher aber bei leichter Wölbung der Grenzflächen und Abrundung der Kanten daraus entstehen kann. *C. Hermann.*

**Oseen, C. W.: Beiträge zur Theorie der anisotropen Flüssigkeiten. XIX: Die Temperaturabhängigkeit der Anisotropie bei Gegenwart äußerer Kräfte.** Ark. Mat. Astron. Fys. 23 A, Nr 25, 1—27 (1933).

Eine Theorie der flüssigen Kristalle nach den Methoden der statistischen Gastheorie wird aufgestellt, indem zu den van der Waals'schen Energiegliedern noch eine Wechselwirkung zwischen zwei Molekülen hinzugefügt wird, die von dem Winkel der ausgezeichneten Richtungen in diesen Molekülen abhängt. (Hier werden zwei verschiedene, konstante Energiewerte angenommen, je nachdem ob dieser Winkel größer oder kleiner ist als ein festes  $\vartheta$ .) Befindet sich die Substanz in einem Kraftfeld, das die Moleküle parallel zu richten strebt, so sind zwei Zustände möglich: Entweder die Lagen der ausgezeichneten Richtung verteilen sich nach einem angenäherten Boltzmann'schen Verteilungsgesetz um die Richtung der Kraft, oder sie sind wesentlich stärker der Kraft parallel gerichtet als diesem Gesetz entspricht. Der erste Zustand ist bei hoher Temperatur stabil, der zweite bei tiefer. Dazwischen gibt es ein Temperaturintervall, wo jeder der beiden Zustände gegen kleine Störungen stabil ist. Der Übergang der beiden Zustände ineinander geschieht also unstetig. Steigt die äußere richtende Kraft, so verengert sich das gemeinsame Temperaturgebiet. Es scheint also, als wäre bei starken Richtkräften ein stetiger Übergang von dem ersten, flüssigen, zum zweiten, flüssig-kristallinen Zustand möglich, ähnlich der stetigen Kondensation von Gasen oberhalb des kritischen Punktes. *C. Hermann (Stuttgart).*

## Klassische Optik.

● **W. R. Hamiltons Abhandlungen zur Strahlenoptik. Übersetzt u. mit Anmerkungen** hrsg. v. Georg Prange. Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1933. VI, 429 S. RM. 24.—.

Die deutsche Übersetzung der optischen Werke von W. R. Hamilton, durch G. Prange, die mit Unterstützung der Firma C. Zeiss von der Akademischen Verlagsgesellschaft herausgegeben werden, sollte ein Markstein in der Geschichte der Strahlenoptik bilden. Immer wieder haben berufene Köpfe, vor allem Felix Klein, darauf hingewiesen, wieviel ungehobene Schätze in diesen vor über 100 Jahren veröffentlichten Arbeiten ruhen; aber die Schwierigkeit, diese Arbeiten einzusehen, vor allem in Deutschland, wo die vorhandenen Exemplare der Irish Transactions an den Fingern einer Hand abzuzählen waren, hat eine tiefergehende

Wirkung verhindert. Nun ist vor 2 Jahren der englische Neudruck der optischen Arbeiten Hamiltons als erstes Werk der Gesamtausgabe erschienen (vgl. dies. Zbl. 2, 85) und jetzt folgt die deutsche Übersetzung der Hauptarbeiten. — Für die Problemkreise des H.schen Werkes sei auf die obige Besprechung verwiesen und hier nur dankbarst erwähnt, daß neben den großen Arbeiten in den Irish Transactions auch der zweite, erst kürzlich aus dem Manuskript veröffentlichte Teil über gebrochene Strahlensysteme, sowie die wichtigsten kleineren Arbeiten zur Strahlenoptik aus dem Phil. Magazine übersetzt wurden. — G. Prange hat sich nicht allein mit der Übersetzung H.s begnügt. Etwa 100 kleingedruckte Seiten enthalten Anmerkungen und Figuren zu den Textstellen, die das Verständnis ganz wesentlich erleichtern. Die Anmerkungen dienen nicht nur dazu, unklare Stellen zu erläutern, angedeutete Beweisführungen durchzuführen, sondern der Herausgeber hat an vielen Stellen auch dargelegt, wie mit den Hilfsmitteln der modernen Mathematik (Vektorrechnung, Matrizenschreibweise) sich viele mühsame und undurchsichtige Rechnungen abkürzen lassen. Für den Leser ist es außerordentlich angenehm, daß diese Anmerkungen gesondert broschiert sind. Dadurch ist es möglich, Text und Anmerkungen nebeneinander zu betrachten und auch den Text für sich zu studieren, ohne daß das Satzbild durch die Anmerkungen gestört wird. Zum Schluß der beigefügten Anmerkungen hat G. Prange (S. 104—117) die Gedanken und Ergebnisse W. R. Hamiltons nach Problemen geordnet zusammengestellt. Die Lektüre insbesondere dieses Abschnittes möge jedem Forscher auf dem Gebiet der geometrischen Optik, der Variationsrechnung, sowie der Liniengeometrie eindringlichst empfohlen werden. Noch lange nicht alle Ergebnisse sind heute in den festen Bestand der Wissenschaften eingedrungen und viele werden unter falscher Flagge geführt.

M. Herzberger (Jena).

● **Handbuch der Astrophysik.** Hrsg. v. G. Eberhard, A. Kohlschütter u. H. Ludendorff. Bd. 1. Grundlagen der Astrophysik. Tl. 1. Berlin: Julius Springer 1933. XII, 564 S. u. 299 Abb. RM. 96.—.

Schulz, H.: Grundlagen der theoretischen Optik. S. 1—81 u. 50 Abb.

Behandelt werden die Polarisation, die Interferenz, die Beugung, die nach Doppler, Zeeman und Stark benannten Erscheinungen. Es wird das Wesen jeder Erscheinung kurz gekennzeichnet, die grundlegenden Abhandlungen zusammengestellt. Ausführlicher wird auf Dinge eingegangen, die für die Astrophysik von Wichtigkeit sind. Hier werden die Beobachtungsvorrichtungen genau beschrieben, das Verfahren und die Formeln angegeben. Erwähnt sei bei der Polarisation der Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit (Mond- und Planetenoberflächen), bei der Interferenz das Michelsonsche Verfahren zur Messung des scheinbaren Durchmessers der Fixsterne sowie die Feinuntersuchungen von Spektren (Lummer-Gehrke, Perrot-Fabry).

Hans Boegehold (Jena).

Buchwald, Eberhard: Klassische Optik. Physik regelm. Ber. 1, 179—192 (1933).

Cesàro, G.: Sur deux formules par lesquelles on remplace la formule de Fresnel dans les calculs de cristallographie optique. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 753—758 (1932).

Die Fresnelsche Formel für die Lichtausbreitung in Kristallen

$$v''^2 - v'^2 = (a^2 - c^2) \sin \theta \sin \theta', \quad (1)$$

in der  $v''$ ,  $v'$  die Geschwindigkeit der beiden Wellen bedeuten, deren Ausbreitungsrichtung mit den optischen Achsen des Kristalles die Winkel  $\theta$  und  $\theta'$  bildet, läßt sich durch zwei Näherungsformeln ersetzen

$$n' - n'' = (n_g - n_p) \sin \theta \sin \theta' \quad (2)$$

oder

$$v' - v'' = (a - c) \sin \theta \sin \theta'. \quad (2_1)$$

Durch  $n'$ ,  $n''$ ,  $n_g$ ,  $n_p$  sind die bez. Brechungsindizes bezeichnet. Der Verf. weist darauf hin, daß die exakte Formel sowie beide Näherungsformeln Spezialfälle einer anderen Gleichung sind, und zeigt anschließend, daß die Formel (2<sub>1</sub>) eine bessere Annäherung darstellt als Formel (2). Trotzdem aber ist die Formel (2) von größerem Nutzen als die Formel (2<sub>1</sub>), da man praktisch nur die Differenz der Brechungsindizes, nicht aber die Differenz der Geschwindigkeiten direkt bestimmen kann. Es folgt hierfür noch eine weitere Begründung. Der Unterschied in der Genauigkeit der beiden Näherungsformeln wird an einem Zahlenbeispiel deutlich gezeigt. Der Fehler beträgt (in der Differenz der Brechungsindizes) in dem Zahlenbeispiel 2 bzw. 6,4 Einheiten der dritten Dezimale.

Picht (Berlin-Lankwitz).

Picht, Johannes: Die „Vergrößerungsskalen“ zur Lösung einfacher geometrisch-optischer Aufgaben. Zentr.-Ztg. Opt. Mech. 54, 268—269 (1933).

Das in dem Aufsätze angegebene Verfahren ist eine Verallgemeinerung einer Mit-



teilung von E. M. Eden [J. Sci. Instrum. 10, 89 (1933)]; nachträglich bemerkt der Verf., daß F. Hauser 1928 in den Bl. Untersuch.- u. Forsch.-Instrum. 2, 46 (1928) ähnliche Überlegungen angestellt hat. — Picht denkt sich zwei Teilungen längs der optischen Achse gezeichnet. Der Nullpunkt der Dingtteilung ist im Dingtrennpunkt  $\bar{F}$ , ihre Maßeinheit die Dingtrennweite  $\bar{f}$ , der Nullpunkt der Bildteilung der Bildtrennpunkt  $F'$ , die Maßeinheit die Bildtrennweite  $f'$ . (Bei einer sammelnden Folge verläuft die Dingtteilung von links nach rechts, die Bildteilung von rechts nach links.) Die Bildteilung gibt dann für jeden Bildpunkt den Abbildungsmaßstab  $\beta'$ , die Dingtteilung für jeden Dingtunkt den Kehrwert des Abbildungsmaßstabs  $\beta$  an. Die Zeichnung ist geeignet, die Beziehungen der Gaußschen Abbildung und einfache Rechnungen zu veranschaulichen, P. zeigt dies an zwei Beispielen. *Hans Boegehold* (Jena).

**Glaser, Walter: Über optische Abbildung durch mechanische Systeme und die Optik allgemeiner Medien.** Ann. Physik, V. F. 18, 557—585 (1933).

Der Verf., der in einer Anzahl Arbeiten der letzten Jahre die Hamiltonschen Gedanken benutzt hatte, um die geometrische Optik der Elektronenstrahlen zu untersuchen, kommt in dieser Arbeit zum Ausgangspunkt des Hamiltonschen Ideenkreises; er benutzt die optischen Methoden und Gedankengänge, um eine Optik mechanischer Systeme abzuleiten. Ref. möchte bemerken, daß eine geringe Erweiterung der Vektorenrechnung im Sinne Grassmanns erlaubt hätte, die in der Arbeit erhaltenen Ergebnisse vom dreidimensionalen Kontinuum auf den  $n$ -dimensionalen Phasenraum der Mechanik zu übertragen. Damit erst wäre die wirkliche Verallgemeinerung geleistet und Ref. hofft, daß die in der Strahlenoptik gefundenen Gesetze insbesondere beim Vorhandensein gewisser Symmetrieeigenschaften auch für die Mechanikersprießliches leisten könnten. — Diese Bemerkung soll jedoch in keiner Weise das Verdienst des Verf. schmälern, dessen Arbeit etwa folgenden Inhalt hat: Im ersten Paragraphen wird für ein dreidimensionales mechanisches Problem aus dem Hamiltonschen Prinzip eine Art mechanischer Brechungsexponent  $\mu$  abgeleitet, und zwar nicht nur wie bekannt für den Fall der klassischen Mechanik, sondern gemäß früheren Arbeiten des Verf. auch für die relativistische Bewegung von Elektronen im elektromagnetischen Feld. Der zweite Paragraph gibt die Umformung des Hamiltonschen Prinzips in den Satz vom kürzesten Lichtweg, entwickelt die Fundamentalformel von Hamilton, die die Gesetzmäßigkeiten beim Übergang von Lichtstrahl zu Nachbarstrahl gewährleistet, führt das Punkteikonal ein und die zugehörigen Gleichungen von Bruns. Der dritte Paragraph entwickelt in analoger Weise das Winkleikonal. Es sei angemerkt, daß von diesem Punkt ab der Verf. sich insofern spezialisiert, daß er Ding- und Bildraum als homogen isotrop ansieht, während er die Zwischenmittel als beliebig anisotrop inhomogen zuläßt. Diese wesentliche Vereinfachung ist die Hauptursache für die Übereinstimmung der Ergebnisse des Verf. mit den in der Optik erhaltenen Resultaten. Da die Hamiltonsche Fundamentalformel nur Größen enthält, die von Ding- und Bildraum abhängen, ist das Verhalten des Lichtstrahls in den Zwischenmitteln auf die optischen Gesetzmäßigkeiten ohne Einfluß. Allerdings ist es nicht ohne Einfluß auf die Bestimmung der Konstanten der Abbildung, und hierin ruht das Hauptverdienst der vorliegenden Arbeit. Vom nächsten Paragraphen ab spezialisiert der Verf. sich auf rotationssymmetrische Systeme, deren Theorie ja in der Optik am ausgiebigsten entwickelt ist. Die Brechzahl  $\mu$  hängt in diesem Fall nur von der Entfernung des Dingtunkts von der Achse ab. Die Unabhängigkeit vom Azimut  $\varphi$  gibt dann ein Impulsintegral. Der fünfte Paragraph behandelt in üblicher Weise die Gaußsche Optik. Die Strahlen in einer Ebene durch die Achse entsprechen sich Ebene für Ebene. Wegen der Anisotropie der Zwischenmittel brauchen jedoch die zusammengehörigen Ebenen nicht zusammenzufallen. Es kann eine „Bildrotation“ eintreten. Verf. bemüht sich, die Konstanten der Gaußschen Abbildung durch näherungsweise Betrachtung des Lichtwegs in den Zwischenmitteln zu erhalten. Insbesondere wird untersucht, welche anisotropen rotationssymmetrischen Mittel sich durch Auflösung des Impulsintegrals formal auf isotrope Mittel zurückführen lassen. Die § 6 und 7 bringen nach der Methode von Schwarzschild die Theorie der Seidelschen Bildfehler. Die Existenz eines weiteren Bildfehlers im Seidelschen Gebiet, den Verf. als Bildzerdrehung bezeichnet, glaubt der Ref. nicht. Hat man einmal das bildseitige Koordinatensystem um die Gaußsche Bildrotation gedreht, so kann seiner Meinung nach die Anzahl der auftretenden Fehlerkoeffizienten hier nicht größer sein als in der gewöhnlichen Strahlenoptik. *Herzberger* (Jena).

**Ardenne, Manfred von: Untersuchungen über achromatische Elektronenlinsen.** Z. Physik 86, 802—809 (1933).

Die Arbeit bespricht einige allgemeine Voraussetzungen für die Herstellung achromatischer Linsen für Elektronenoptik, zum Teil unter Analogiebetrachtungen zur Lichtoptik und zu den dort benutzten achromatischen Linsen. Es wird im Anschluß



an einige diesbezügliche Überlegungen der Aufbau einer achromatischen Sammellinse — bestehend aus einer magnetischen Zerstreuungslinse und einer elektrischen Sammellinse — und einer achromatischen Zerstreuungslinse — bestehend aus einer magnetischen Sammellinse und einer elektrischen Zerstreuungslinse — kurz skizziert. Als elektrische Zerstreuungslinse wird die von Ruska angegebene „Netzoptik“ benutzt, während als magnetische Zerstreuungslinse eine in der Arbeit erstmalig vorgeschlagene Anordnung benutzt wird.

Picht (Berlin-Lankwitz).

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Somigliana, Carlo: Les expressions finies de la pesanteur normale. Bull. géodés. Nr 38, 178—187 (1933).

Caloi, P.: Nuovo metodo per calcolare le profondità ipocentrali. Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. 1, 508—511 (1933).

Starting with Galitzin's expression for the epicentral distance of a seismic ray in terms of the angle of emergence, the variation of wave velocity with depth, and the focal depth, Caloi proposes to determine the focal depth of an earthquake from observations of the apparent angle of emergence, which is connected by known formulae with the true angle of emergence. He takes the variation of the velocity of  $\bar{P}$  (otherwise  $P_g$ ) as known at depths down to 60 km., and apparently assumes that the sedimentary layers have no effect on the angle of emergence; he then tabulates the angle of emergence at varying epicentral distances for ten different assumed focal depths, ranging from 1 km. to 60 km.

Stoneley (Leeds).

Langer, R. E.: An inverse problem in differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 814—820 (1933).

Die von L. B. Slichter (dies. Zbl. 7, 334) formulierte Aufgabe aus der angewandten Geophysik [Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma(x)$  der Erdkruste als Funktion der Tiefe  $x$  aus der oberflächlichen Potentialverteilung, bei Stromzufuhr durch eine Punktelektrode] führt auf ein inverses Differentialgleichungsproblem. Dieses wird hier in folgender Form gelöst: Im Intervall  $0 \leq x \leq h$  ist von einer Funktion  $\sigma(x)$  bekannt, daß sie analytisch und positiv ist. Ferner ist bekannt, daß die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sigma(x) \frac{du}{dx} \right\} - \lambda^2 \sigma(x) u = 0$$

eine Lösung  $u_1(x, \lambda)$  hat mit folgenden Eigenschaften: Für  $0 \leq x \leq h$  und  $0 < \lambda < \infty$  ist  $u_1(x, \lambda) > 0$ ,  $\partial u_1 / \partial x \equiv u'_1(x, \lambda) < 0$ , während bei  $x = 0$  die Grenzbedingung

$$\Omega(\lambda) u'_1(0, \lambda) + \lambda u_1(0, \lambda) = 0$$

erfüllt ist; dabei ist  $\Omega(\lambda)$  für  $0 < \lambda < \infty$  gegeben und mit den Eigenschaften von  $u_1$  verträglich. Die Funktion  $\sigma(x)$  ist zu berechnen.

J. Bartels (Eberswalde).

### Geodäsie:

Piazzolla-Beloch, Margherita: Sulla risoluzione di un problema di aereo-fotogrammetria. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 12—17 (1933).

Es wird eine Lösung des räumlichen Rückwärtsschnitts bei Luftaufnahmen für den Fall gegeben, daß 2 Punkte im Gelände und eine Richtung  $s$  bekannt sind. Die Lösung geht auf das von S. Finsterwalder im Jber. Deutsch. Math.-Verein. 1899 angegebene Pyramidenverfahren zurück, wo auch der hier behandelte Sonderfall unter der Voraussetzung, daß  $s$  vertikal ist, beschrieben ist. Piazzolla-Beloch entwickelt für beliebiges  $s$  eine analytische Lösung, bei der die Kantenlängen der Pyramide durch einfache quadratische Gleichungen ermittelt werden. Sie gibt ferner eine graphische, mit Lineal und Zirkel ausführbare Lösung an, bei der ebenfalls zuerst die Länge der Kanten und dann die Lage des Aufnahmezentrums im Raum bestimmt wird.

R. Finsterwalder (Hannover).



**Lips: Zur Darstellung der Halbmesser des Erdellipsoids durch die Hilfswerte  $c$  und  $e'^2$ .** Z. Vermessgswes. **62**, 633—638 (1933).

Es wird eine Darstellung der Halbachsen und der Krümmungshalbmesser des Erdellipsoids und der Radien verschiedener Ersatzkugeln durch die Hilfswerte  $c = a^2 : b$  und  $e'^2 = (a^2 - b^2) : b^2$  gegeben, worin  $a$  und  $b$  die Halbachsen des Erdellipsoids und  $c$  den Meridiankrümmungshalbmesser in den Polen des Ellipsoids bedeuten. Die Darstellungen haben die Form von Reihenentwicklungen nach Potenzen von  $e'$  bis einschließlich der Glieder  $e'^8$ . Zahlenmäßige Vergleichen erfolgen auf der Grundlage des Besselschen Erdellipsoids.

*Schmehl (Potsdam).*

**Grabowski, L.: Über die Richtungsreduktionen bei der Gaußschen konformen Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene.** Z. Vermessgswes. **62**, 529—536 (1933).

Verf. macht auf einige Fehler aufmerksam, die im dritten Bande von Jordans Handbuch der Vermessungskunde (7. Aufl. 1923) in der Herleitung der Formeln für die Richtungsreduktionen bei der Gaußschen konformen Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene enthalten sind. Es werden diese Fehler beseitigt. Schließlich wird noch eine für manche Anwendungen geeignete Umformung der Gebrauchsformeln gegeben.

*Schmehl (Potsdam).*

**Mineo, Corradino: On the limits of validity of a theorem of Stokes regarding the figure of the earth.** Quart. J. Math., Oxford Ser. **4**, 184—192 (1933).

Poincarés Verfahren zur Bestimmung des Geoids vernachlässigt nicht bloß Größen von der Ordnung des Quadrates der Undulation  $\zeta$ , sondern schon wesentlich größere Glieder von der Ordnung  $\varepsilon \zeta$ , unter  $\varepsilon$  die Abplattung  $(a + b - 2c) : 2a$  des Bezugsellipsoides verstanden. Die Annäherung bleibt somit grundsätzlich dieselbe wie bei der Stokesschen Lösung. Hingegen ist das Problem auch für einen rasch rotierenden Planeten lösbar und kann auf die dritte Randwertaufgabe der Potentialtheorie zurückgeführt werden.

*K. Ledersteger (Wien).*

**Schumann, R.: Graphische Darstellung von Geoidabständen auf Grund der Stokessehen Formel.** Gerlands Beitr. Geophys. **40**, 298—304 (1933).

**Spanò Gargano, Domenico: Alcune considerazioni sulle formole di navigazione lossodromica nell'ipotesi della terra ellissoidica.** Ann. Ist. super. Navale **1**, 281—296 (1932).

**Vening Meinesz, F. A.: La réduction isostatique selon l'hypothèse de Airy.** Bull. géodés. Nr 38, 188—197 (1933).

**Merkel, H.: Zur Theorie des an einen unzugänglichen trigonometrischen Punkt angeschlossenen Polygonzuges.** Z. Vermessgswes. **62**, 625—633 (1933).

Zur Berechnung eines an einen unzugänglichen trigonometrischen Punkt (Hochpunkt) angeschlossenen Polygonzuges gibt es mehrere praktische Verfahren (Zentrierungsrechnung, Herunterholen des Hochpunktes), die sich meist auf die Messung eines Hilfsdreiecks stützen und bei hinreichender Beobachtungsgenauigkeit stets praktisch brauchbare Ergebnisse liefern. Vom theoretischen Standpunkt betrachtet, sind nicht alle Verfahren gleichwertig, wie Verf. zeigt. Als Kriterium für die bei den verschiedenen Verfahren erzielte Genauigkeit wird unter gewissen vereinfachenden Annahmen über den Gesamtverlauf des Polygonzuges die Querverschiebung der Zugmitte verwendet. Bei der Vergleichung der einzelnen Verfahren wird u. a. festgestellt, daß z. B. bei Annahme zweier ungenaueren Brechungswinkel am Anfang oder am Ende des Zuges die mittlere Querverschiebung kleiner wird als beim gewöhnlichen Polygonzuge von gleicher Länge, wenn man eine Zwischenorientierung am Anfang der letzten oder am Ende der ersten Polygonzugseite einführt.

*Schmehl (Potsdam).*

**Finsterwalder, S.: Die Fehlergesetze gleichförmiger gestreckter Dreiecksketten.** S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. **2**, 149—177 (1933).

Gestreckte Dreiecksketten werden bei der Aufnahme größerer Länder vorzugsweise verwendet. Die Fehlergesetze für solche Ketten sind in der Literatur häufig



behandelt, doch hat man sich dabei meist zu sehr an die Einzelformen der Kettenglieder gehalten. Verf. gibt im Anschluß an eine in der Festschrift „Eduard Dolezal“ (Wien 1932) veröffentlichte Skizze einen Weg an, wie man die Fehlergesetze im großen studieren kann. Wird eine langgestreckte Kette mit annähernd gleichartigen Einzelgliedern (Dreiecken, Vierecken mit Diagonalen, Rauten) aus gemessenen Stücken berechnet und ausgeglichen, so rühren die Unterschiede zwischen der gerechneten Kette und der Wirklichkeit her von: 1. Richtungsabweichungen, 2. Querabweichungen, 3. Maßstababweichungen, 4. Längsabweichungen. Verf. ersetzt die wirkliche Kette durch ein Scheinbild, in dem die genannten vier Abweichungen stetige Funktionen der Längsverstreckung der Kette sind. Hierdurch ist es möglich, diese Scheinkette infinitesimalrechnerisch zu behandeln, wodurch die wesentlichen Zusammenhänge in übersichtlicher Form abgeleitet werden können. Insbesondere werden untersucht: Die endfreie Kette, die eingehängte Kette, die durch gleichmäßige Krümmung und Dehnung geänderte Kette, die durch gleichmäßig zunehmende Krümmung und Dehnung geänderte Kette. Als Beispiele werden zahlenmäßig durchgerechnet: Der Vorwärts-einschnitt und eine Flächenaufnahme.

*Schmehl (Potsdam).*

**Blass, K.: Maschenweise Übertragung von Koordinaten einer selbständigen älteren Triangulierung in das System einer selbständigen neuen Triangulierung und umgekehrt.** Allg. Vermessgs-Nachr. 45, 693—697, 709—714, 725—733 u. 742—747 (1933).

**Mittelstaedt: Eine neue graphische Tafel für Vierecksteilungen.** Z. Vermessgswes. 62, 559—564 (1933).

**Lancaster Jones, E.: The rapid adjustment of observations in a network of geophysical stations by the method of least squares.** Proc. Physic. Soc., London 45, 792 bis 807 (1933).

Eine in der Geodäsie und in der Geophysik häufige Aufgabe betrifft die Ausgleichung einer Reihe von Werten einer physikalischen Größe für eine Anzahl von Stationen. Diese Werte sind aus anderen beobachteten Größen durch Rechnung gewonnen, die insbesondere die geometrischen Verbindungen der Stationen enthalten. Die durch die Vielheit dieser Verbindungen auftretende Mehrdeutigkeit hinsichtlich der gesuchten Werte wird gewöhnlich durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate beseitigt. Verf. entwickelt ein Näherungsverfahren und ein Rechenschema für die Aufstellung und Auflösung der zugehörigen Normalgleichungen, wodurch insbesondere bei großen und komplizierten Stationsnetzen ein großer Teil der gewöhnlichen Rechenarbeit erspart wird. Als Anwendung wird die Bestimmung von Isogammen aus geophysikalischen Messungen von Schweregradienten behandelt.

*Schmehl (Potsdam).*

**Weigel, K.: Jonction des réseaux de triangulation des grands continents.** Bull. géodés. Nr 38, 198—209 (1933).

Zu den wichtigsten Aufgaben der höheren Geodäsie zählt die Verbindung von Dreiecksnetzen in großen Kontinenten. Verf. löst zwei Aufgaben: 1. Die Vereinigung der verschiedenen als starr angenommenen Dreiecksnetze zu einem System. 2. Die Bestimmung desjenigen Referenzellipsoides, das sich diesem System am besten anpaßt. Um die Einzelsysteme an den Grenzen zu verbinden, wird eine Zahl von Verbindungspunkten gewählt, die je zwei Systemen gemeinsam angehören. Da die einzelnen Netze auf verschiedenen Ellipsoiden gerechnet sind, wird vorgeschlagen, die genannten Verbindungspunkte mit Hilfe des von Helmert eingeführten astronomischen Nivellements auf das Geoid zu übertragen. Nach Umwandlung der geographischen Koordinaten in rechtwinklige gibt Verf. ein Rechenverfahren zur Bestimmung eines einzigen gemeinsamen Ellipsoides an. Zwei Fälle werden behandelt: 1. Ermittlung der Achsen dieses Ellipsoides. 2. Bestimmung der großen Achse des Ellipsoides, wenn dessen Abplattung als bekannt (aus Schweremessungen abgeleitet) angenommen wird.

*Schmehl (Potsdam).*